## III. Analyse de Fourier et diffusion thermique

**15.** Raisonnons par analyse dimensionnelle comme cela est suggéré. On cherche une expression du type :

$$D = \mu^{\alpha} \lambda^{\beta} c^{\gamma}$$

avec :

— $[D] = L^2.T^{-1}$ ;

— $[\mu] = M.L^{-3}$

— $[\lambda] = \dfrac{[\vec{j}\,]}{[\overrightarrow{\mathrm{grad}}T]} = \left[\dfrac{J.m^{-2}.s^{-1}}{K.m^{-1}}\right] = \left[\dfrac{kg.m^2.s^{-2}.m^{-2}.s^{-1}}{K.m^{-1}}\right] = M.T^{-3}.L.K^{-1}$ ;

— $[c] = [\dfrac{J}{mT}] = [\dfrac{kg.m^2.s^{-2}}{kg.K}] = L^2.T^{-2}.K^{-1}$

d'où :

$$L^2.T^{-1} = M^\alpha.L^{-3\alpha}.M^\beta.T^{-3\beta}.L^\beta.K^{-\beta}.L^{2\gamma}.T^{-2\gamma}.K^{-\gamma}$$

On en déduit le système des quatre équations : $\begin{cases} 2 = -3\alpha+\beta+2\gamma \\ 0 = \alpha+\beta \\ -1 = -3\beta-2\gamma \\ 0 = -\beta-\gamma \end{cases}$

D'où l'on tire finalement :

$$\boxed{\alpha = -1\,;\,\beta = 1\,;\,\gamma = -1 \text{ soit } D = \frac{\lambda}{\mu c}}$$

Ainsi comme $D$ est homogène au carré d'une distance sur un temps, on peut exprimer $\tau$ comme :

$$\boxed{\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2\mu c}{\lambda} = \frac{4.10^2 \times 7,9.10^3 \times 5^2.10^{-2}}{8.10} \sim 10^4 \text{ s}}$$

**16.** La loi de Fourier est :

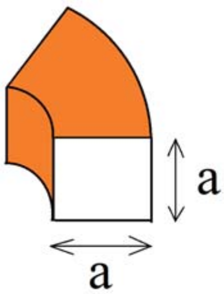
$$\overrightarrow{j}_{th} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}T$$

Ici $T = T(\theta,t)$ d'où $\overrightarrow{\text{grad}}T = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\overrightarrow{e}_\theta$ et donc :

$$\boxed{\overrightarrow{j}_{th} = -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\overrightarrow{e}_\theta}$$

Les lignes de champ correspondent à des cercles concentriques.

**17.** Voici le volume élémentaire qui est évoqué :




Le volume élémentaire associé est donc :

$$\boxed{dV \sim Rd\theta\int_{R-a/2}^{R+a/2} dr \int_{-a/2}^{a/2} dz \text{ soit } dV = Ra^2d\theta}$$

La surface latérale correspond aux deux zones orangées visibles auxquelles il faut en ajouter deux autres non visible dans la partie arrière du volume élémentaire soit :

$$\boxed{dS_{\text{lat}} \sim 2Rd\theta a + 2Rd\theta a = 4Rd\theta a}$$

Un bilan d'énergie sur le volume $dV$ donne :

$$d^2U = \delta^2Q$$

avec
$d^2U = dU(t+dt) - dU(t) = dmcT(\theta,t+dt) - dmcT(\theta,t) = \mu c\frac{\partial T}{\partial t}dtdV.$
Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\delta^2Q \quad &= \delta^2Q_{diff} + \delta^2Q_{conv} \\
&= \left(j(R,\theta)a^2dt - j(R,\theta+d\theta)a^2dt\right) - h(T-T_e)dS_{\text{lat}}dt \\
&= -\frac{\partial j}{\partial\theta}a^2d\theta dt - h(T-T_e)dS_{\text{lat}}dt \\
&= \frac{\lambda a^2}{R}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}d\theta dt - h(T-T_e)4Rad\theta dt
\end{aligned}$$

(il faut veiller au signe devant le terme conducto-convectif, c'est une erreur assez courante). On réinjecte les deux membres développés dans le bilan d'énergie et en simplifiant par $d\theta$ et $dt$, on obtient :

$$\boxed{\mu c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2} - \frac{4h}{a}(T-T_e)}$$

**18.** Dans le cas stationnaire, on a bien sûr : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$, soit en reprenant l'équation précédente et en introduisant $\delta$ :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 T = -\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 T_e$$

La solution de cette équation est :

$$\boxed{T(\theta) = A\exp\left(-\frac{R\theta}{\delta}\right) + B\exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right) + T_e}$$

Et puis $[\delta] = L$ car $\dfrac{R\theta}{\delta}$ doit être adimensionné.

**19.** Il y a un pic de température en $\theta = 0$. A proximité de $\theta = \pi$, la température varie peu, le flux s'annule. Au final, les conditions aux limites donnent donc : $\begin{cases} T(0^+) = T_1 \\ j(\pi) = 0 \end{cases}$

(l'équation différentielle n'est pas valable en $\theta = 0$ car c'est le point où l'on chauffe). Ces deux équations donnent :

$$\begin{cases} A + B = T_1 - T_e \\ A\exp\left(-\dfrac{R\pi}{\delta}\right) = B\exp\left(\dfrac{R\pi}{\delta}\right) \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \text{ et } A = \frac{\exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}(T_1 - T_e)}$$

et donc la solution complète est :

$$\boxed{T(\theta) = T_e + \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2\pi R}{\delta}\right)}\left\{\exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{R(2\pi - \theta)}{\delta}\right)\right\}}$$

**20.** On s'attend à ce que la diffusion soit complètement établie lorsque $\tau = \dfrac{L^2}{D} = \dfrac{\mu c L^2}{\lambda}$, avec $L = \pi R$. Au final :

$$\tau = \frac{7{,}9.10^3 \times 4.10^2 \times \pi \times 1{,}6^2.10^{-2}}{8.10} \sim 3.10^3 s$$

Au final, on obtient :

$$\boxed{\tau \sim 1 \text{ h}}$$

On retrouve bien le même ordre de grandeur.

**21.** Il n'y a pas de terme de conducto-convection, donc cette fois :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

en utilisant le fait que $T(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$ on obtient :

$$\frac{\mu c R^2}{\lambda}\frac{f_n}{f_n''} = \frac{g_n}{g_n'}$$

Ces deux termes sont égaux mais dépendent a priori de variables différentes : la seule possibilité est qu'ils s'égalisent chacun avec la même constante que l'on va noter $\alpha$. En conséquence, on a :

— d'une part $g_n = \alpha g_n'$ soit $g_n = a_n \exp(t/\alpha)$ ;

— d'autre part $f_n'' - \dfrac{\mu c R^2}{\lambda \alpha} f_n = 0$. Comme $\alpha$ est forcément négative (sinon $g_n$ diverge), c'est une équation du type oscillateur harmonique dont la solution est donc $f_n(\theta) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{\mu c R^2}{-\lambda\alpha}}\theta + \varphi\right)$

En posant $A = B_n$, $\alpha = -\tau_n$ et en prenant $\varphi = 0$ par un choix judicieux de l'origine des angles $\theta$, on aboutit à :

$$\boxed{T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \text{ avec } \frac{1}{d_n} = \frac{\mu c}{\lambda \tau_n}}$$

**22.** $T_m$ représente la température moyenne le long du profil de $\theta = -\pi$ à $\theta = \pi$. La solution de la question précédente a pour périodicité $\Theta = 2\pi \dfrac{d_n}{R}$ et est une solution de l'équation étudiée. Or on peut noter que dans la géométrie associée au problème, il faut une fonction qui se répète a minima tous les $2\pi$. Toute fonction de période $\dfrac{2\pi}{n}$ avec $n$ entier naturel non nul correspond donc. On en déduit donc que :

$$\boxed{\Theta = 2\pi \frac{d_n}{R} = \frac{2\pi}{n} \text{ soit } n = \frac{R}{d_n}}$$

Une combinaison linéaire de solutions à variables séparées permet de prendre en compte d'un coup toutes les valeurs possibles de $n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

C'est bien également une solution de l'équation différentielle (celle-ci étant linéaire). Enfin, il est à noter que la solution $T(\theta,t) = C$ avec $C$ constante est aussi solution. La solution générale est donc :

$$\boxed{T(\theta,t) = C + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta) \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_n}\right)}$$

ce qui correspond bien aux conditions initiales si $C = T_m$. Par identification, on en déduit que :

$$\boxed{d_n = \frac{R}{n}\ ;\ B_n = b_n \text{ et } \tau_n = \frac{\mu c d_n^2}{\lambda} = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}}$$

**23.** L'observation de M. Fourier se traduit mathématiquement par le fait que tous les termes $n \geq 2$ deviennent rapidement négligeables devant celui associé à $n = 1$. C'est logique parce que tous les termes s'atténuent avec un temps caractéristique :

$$\tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$$

qui est toujours plus petit quand $n$ augmente. Donc le terme en $n = 2$ s'amortit quatre fois plus vite que celui en $n = 1$, le terme en $n = 3$ s'amortit neuf fois plus vite que celui en $n = 1$. Cette dépendance penche dans le sens où le terme en $\cos(\theta)$, associé à $n = 1$, devienne rapidement dominant dans la somme devant ceux associés à $n > 1$.

# *** FIN DU CORRIGE ***