

DS6 - Corrigé

Remarques importantes

- ✗ Confusion fréquente entre dérivée par rapport au temps et à l'espace : $\frac{\partial Y}{\partial x}$ n'est pas une vitesse !
- ✗ Même remarque concernant les conditions aux limites et les conditions initiales !
- ✗ Lors d'un BAM sur une tranche méso, il faut tenir compte des forces de contact en x et $x + dx$.
- ✗ Pour raisonner sur des ordres de grandeur, il faut comparer des grandeurs de même dimension.
- ✗ Le nombre de conditions limites à utiliser est donné par l'ordre de dérivation le plus grand par rapport aux dérivées par rapport à l'espace (x ici).
- ✗ Le PDF (ou TRC) s'applique à un système : pour un solide, il fait intervenir l'accélération du centre d'inertie du solide). Écrire « le PFD appliqué en A donne : » ne veut absolument rien dire.

I- Vibration d'une corde souple

1. ✗ On néglige la raideur de la corde, donc : $\vec{M} = \vec{0}$ et $\vec{T} = \vec{0}$. La seule contrainte exercée par un bout de la corde sur le bout voisin est tangent à la corde (suivant $\vec{n}$).
- ✗ On néglige le poids, le couplage avec l'air,
- ✗ On étudie l'élément de corde de longueur ds dans le référentiel terrestre galiléen ($\mathcal{R}$). A l'ordre 1, on a $ds = dx$
- ✗ L'angle α étant faible, on peut écrire :

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ et } \cos \alpha \approx 1$$

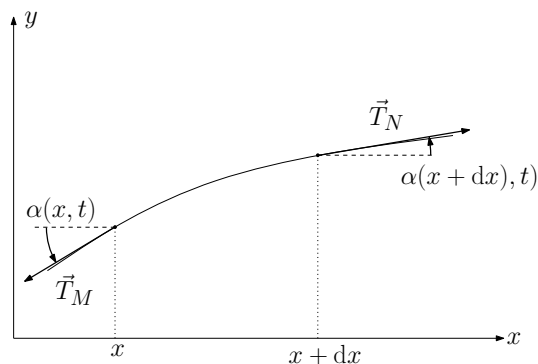


FIGURE 1 – BAM agissant sur une longueur mésoscopique de la corde

✗ BAM :

— $\vec{T}_N$: la tension en N , tangente à la corde, ici : $\vec{N}(x + dx, t)$

- $\vec{T}_M$: la tension en M , tangente à la corde, ici : $-\vec{N}(x, t)$
- On note $N(x, t)$, la norme de $\vec{N}(x, t)$ et N_0 la norme de $\vec{N}(x, t)$ au repos. Dans l'approximation des petits mouvements, on peut écrire : $N(x, t) = N_0 + \varepsilon(x, t)$ avec $N_0 \gg \varepsilon(x, t)$.

✕ PFD appliqué à l'élément de corde de longueur dx :

$$dm \vec{a} = \vec{N}(x + dx, t) - \vec{N}(x, t)$$

✕ En projection sur (Ox) , on obtient :

$$0 = (N \cos \alpha)(x + dx, t) - (N \cos \alpha)(x, t) \Rightarrow \frac{\partial(N \cos \alpha)}{\partial x} = 0 \Rightarrow (N \cos \alpha)(t)$$

Or, sachant que l'on travaille à l'ordre 1, on a : $N \cos \alpha \approx N$, on en déduit :

$$N(x, t) = N(t)$$

✕ En projection sur (Oy) , on obtient :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = (N \sin \alpha)(x + dx, t) - (N \sin \alpha)(x, t) = \frac{\partial(N \sin \alpha)}{\partial x} dx$$

Or, sachant que l'on travaille à l'ordre 1, on a : $N \sin \alpha \approx N_0 \sin \alpha \approx N_0 \alpha \approx N_0 \frac{\partial Y}{\partial x}$, on en déduit :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{N_0}{\rho S} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

On trouve bien une équation de d'Alembert de célérité :

$$c = \sqrt{\frac{N_0}{\rho S}}$$

✕ La figure 2 représente le dispositif complet : la tension de la corde est fixée par la masse m . Dans le cas de petites oscillations, on a :

$$N = N_0 = mg$$

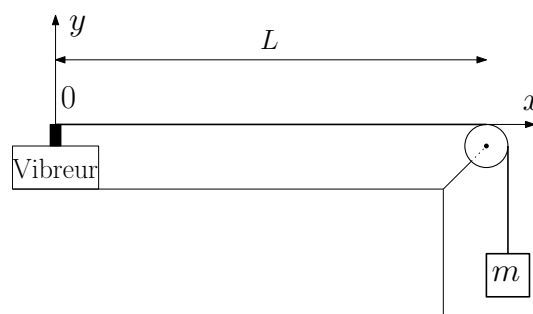


FIGURE 2 – Dispositif expérimental

2. ✕ Aucun calcul n'est attendu : il faut donc donner directement les valeurs des fréquences propres :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} ; f_n = n \frac{c}{2L} ; L = n \frac{\lambda}{2}$$

- ✗ Lorsque la fréquence d'excitation est différente d'une fréquence propre, la corde ne bouge quasiment pas comme indiqué figure 3.

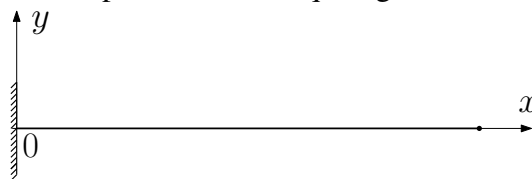


FIGURE 3 – Allure de la corde pour une fréquence quelconque

- ✗ Lorsque la fréquence d'excitation est égale à une des fréquences propres (f_n), alors la corde présente n fuseaux et des noeuds et des ventres comme indiqué figure 4.

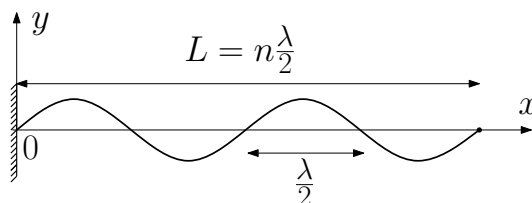


FIGURE 4 – Allure de la corde à la résonance

- La fréquence du fondamental ($n = 1$) vaut : $f_1 = \frac{c}{2L}$. On peut donc augmenter la fréquence du fondamental en diminuant la longueur de la corde ou en augmentant c (pour une corde donnée, il suffit d'augmenter la tension du fil).
- On choisit une corde en acier de masse volumique $\rho = 8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de section $S = 0.2 \text{ mm}^2$ et on choisit de tendre les cordes sous une tension de 100 N (masse de 10 kg).

- ✗ La fréquence du fondamentale (f_1), de valeur $f_1 = 440 \text{ Hz}$, est obtenue pour $L = L_0 = 28 \text{ cm}$
- ✗ La fréquence de la corde (i), de fréquence $f_i = f_0 \times 2^{\frac{i}{12}}$, est obtenue pour $L_i = L_0 \times 2^{-\frac{i}{12}}$
- ✗ La dernière corde (f_{12}) aura donc une fréquence $f_{12} = 880 \text{ Hz}$ et une longueur $L_{12} = \frac{L_0}{2} = 14 \text{ cm}$
- ✗ On peut disposer les cordes comme représenté figure (5).

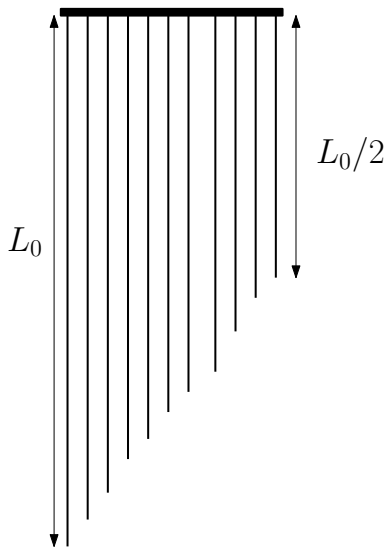


FIGURE 5 – Exemple de disposition

II- Équation générale

5.

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (1)$$

6. Supposons que sur un morceau de corde, on ait : $Y = kx$, avec k constante non nulle, alors ce bout de corde n'est pas tordu et on a : $\vec{M} = \vec{0}$. Or dans ce cas, on a $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0$ tandis que $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0$. On en déduit :

$$\mathcal{M} = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Y et x sont en m et $\mathcal{M}$ est en N·m et donc γ est en N·m²

γ dépend notamment du module de Young de la poutre.

7. On applique le TMC, à l'élément de longueur de la lame compris entre x et $x + dx$, par rapport à son centre d'inertie G . Le BAM agissant sur le système donne :

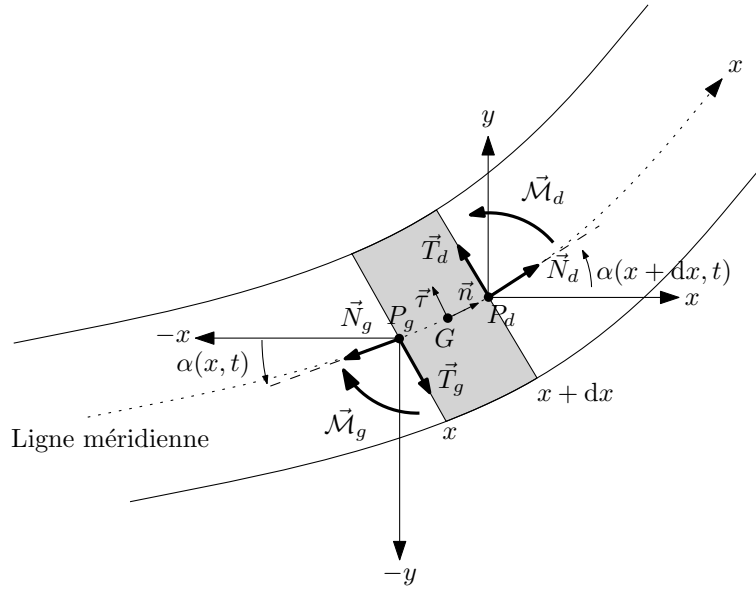


FIGURE 6 – Représentation de la tranche

- ✗ La force $\vec{N}_d$ exercée sur la droite de l'élément (en P_d)
- ✗ La force $\vec{N}_g$ exercée sur la gauche de l'élément (en P_g)
- ✗ La force $\vec{T}_d$ exercée sur la droite de l'élément (en P_d)
- ✗ La force $\vec{T}_g$ exercée sur la gauche de l'élément (en P_g)
- ✗ Le moment $\vec{M}_d$ exercée sur la droite de l'élément (en P_d)
- ✗ Le moment $\vec{M}_g$ exercée sur la gauche de l'élément (en P_g)

Le TMC, appliqué à la tranche, en G , dans le référentiel barycentrique de l'élément et en négligeant le moment dynamique de la tranche, donne :

$$\overrightarrow{GP_d} \wedge (\vec{N}_d + \vec{T}_d) + \overrightarrow{GP_g} \wedge (\vec{N}_g + \vec{T}_g) + \vec{M}_d + \vec{M}_g = \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{0}$$

Sachant que $\overrightarrow{GP_d}$ et $\overrightarrow{GP_g}$ sont colinéaires à $\vec{n}$, tout comme $\vec{N}_d$ et $\vec{N}_g$, on a :

$$\overrightarrow{GP_d} \wedge (\vec{N}_d) = \overrightarrow{GP_g} \wedge (\vec{N}_g) = \vec{0}$$

Sachant que $\overrightarrow{GP_d} \wedge (\vec{T}_d) = \frac{dx}{2} T(x+dx) \vec{u}_z$ et $\overrightarrow{GP_g} \wedge (\vec{T}_g) = \frac{dx}{2} T(x) \vec{u}_z$, on en déduit :

$$\frac{dx}{2} T(x+dx) \vec{u}_z + \frac{dx}{2} T(x) \vec{u}_z + [\mathcal{M}(x+dx) - \mathcal{M}(x)] \vec{u}_z = \vec{0}$$

Soit :

$$T(x)dx + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} dx = 0$$

(à l'ordre 1 en dx)

D'où :

$$T(x) = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \quad (2)$$

8. On reprend le BAM de la question précédente, le TRC appliqué à la tranche donne :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{N}_d + \vec{N}_g + \vec{T}_d + \vec{T}_g$$

En projetant sur (Ox) , on obtient :

$$N(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - N(x, t) \cos \alpha(x, t) - T(x+dx, t) \sin \alpha(x+dx, t) + T(x, t) \sin \alpha(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial(N \cos \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial(T \sin \alpha)}{\partial x}$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on obtient :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(T \alpha)}{\partial x} \quad (3)$$

D'où :

$$N(x, t) = N_0(t) + (\alpha T)(x, t) \quad (4)$$

En projetant sur (Oy) , on obtient :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = N(x+dx, t) \sin \alpha(x+dx, t) - N(x, t) \sin \alpha(x, t) + T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t)$$

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial(N \sin \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(T \cos \alpha)}{\partial x}$$

Dans l'approximation des petits angles on obtient :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial(N \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}$$

Soit :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}$$

D'où :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial(T \alpha)}{\partial x} + N \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5)$$

Soit, en utilisant l'équation (4) :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial(T \alpha)}{\partial x} + N_0(t) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\alpha T) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1, on obtient :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = N_0(t) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6)$$

On suppose que $N_0(t)$ ne dépend pas de t (mouvement de la masse m négligeable), on obtient donc :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = N_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}$$

Soit, en utilisant les équations (1) et (2) :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{N_0}{\rho S} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\rho S} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \quad (7)$$

On trouve bien l'équation demandée avec $c = \sqrt{\frac{N_0}{\rho S}}$. Pour $\gamma = 0$, on retrouve bien l'équation de d'Alembert.

9. L'équation (7) est une équation différentielle d'ordre 4 : il faut donc 4 conditions aux limites, portant sur Y (et $\alpha = \frac{\partial Y}{\partial x}$ ou $\mathcal{M} = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ou $T = -\gamma \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$) en $x = 0$ et $x = L$.

III - Instruments à lame vibrante

$N = 0$ implique $T_0 = 0$ et donc l'équation (7) devient :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\frac{\gamma}{\rho S} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \quad (8)$$

III.A Solutions harmoniques

10. On injecte $\underline{Y} = f(x) \exp^{i\omega t}$ dans l'équation (8), et on obtient l'équation différentielle vérifiée par f :

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{\omega^2}{A} f(x) \quad (9)$$

l'équation caractéristique de cette équation différentielle est :

$$r^4 = \frac{\omega^2}{A}$$

Soit :

$$r^2 = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{A}}$$

D'où, en posant $K = \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{A}}$:

$$r_1 = K; r_2 = -K; r_3 = iK; r_4 = -iK$$

La fonction f s'écrit donc :

$$f(x) = \underline{A}_1 \exp^{Kx} + \underline{A}_2 \exp^{-Kx} + \underline{A}_3 \exp^{iKx} + \underline{A}_4 \exp^{-iKx}$$

En utilisant $\exp^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ et $\exp^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, on trouve l'expression demandée :

$$f(x) = B_1 \sin(Kx) + B_2 \cos(Kx) + B_3 \sinh(Kx) + B_4 \cosh(Kx)$$

III.B lame posée : le xylophone

III.B.a Cadre général

11. Les extrémités de la lame restent en contact, on a donc : $Y(0, t) = Y(L, t) = 0$. De plus, elle est libre de tourner, donc il n'y a pas de moment exercé sur les extrémités : $\mathcal{M}(0, t) = \mathcal{M}(L, t) = 0$.

12. ✕ La condition $Y(0, t) = 0$ donne :

$$B_2 + B_4 = 0$$

✕ La condition $\mathcal{M}(0, t) = 0$ donne :

$$-B_2 + B_4 = 0$$

On en déduit :

$$B_2 = B_4 = 0$$

✕ La condition $Y(L, t) = 0$ donne :

$$B_1 \sin(KL) + B_3 \sinh(KL) = 0$$

✕ La condition $\mathcal{M}(L, t) = 0$ donne :

$$-B_1 \sin(KL) + B_3 \sinh(KL) = 0$$

On en déduit :

$$B_1 \sin(KL) = B_3 \sinh(KL) = 0$$

On a donc (on élimine le cas où $K = 0$) : $B_3 = 0$ et $\sin(KL) = 0$

D'où :

$$f_n(x) = B_n \sin(K_n L) \quad \text{avec} \quad K_n = \frac{n\pi}{L} = nK_1$$

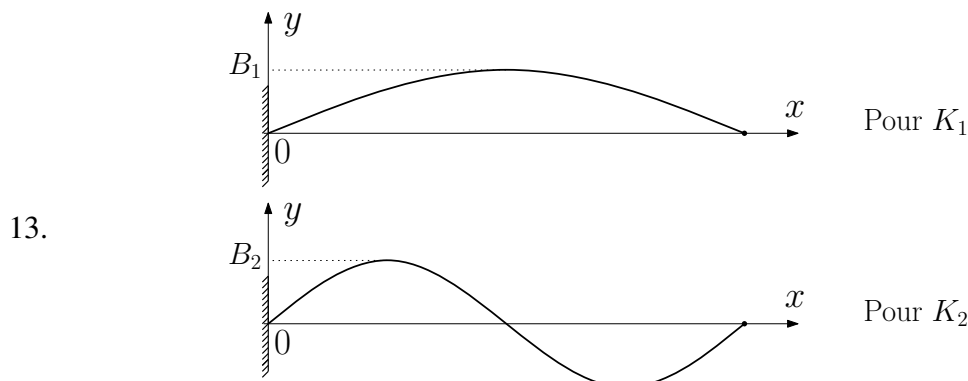


FIGURE 7

14. Sachant que $K = \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{A}}$, on obtient :

$$\omega_n = \sqrt{AK_n^4} = \sqrt{A} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = n^2 \omega_1$$

$$f_n = \sqrt{A} \frac{n^2 \pi}{2L^2} = n^2 f_1$$

On a donc des harmoniques de pulsations ω_n : on peut donc décrire une oscillations quelconque par une série de Fourier :

$$Y_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp^{i\sqrt{A} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp^{i\sqrt{A} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

15. Pour une corde on a $\omega_n = n\omega_1$: tous les multiples du fondamental sont possibles. Ce qui n'est pas le cas du xylophone : la première pulsation après ω_1 est $4\omega_1$. or le timbre d'un instrument dépend fortement de la présence de $2\omega_1$: le timbre du xylophone est donc pauvre.

III.B.b Applications

16. ✕ La fréquence du La_2 vaut $f_{La_2} = \frac{f_{La_3}}{2} = 220 \text{ Hz}$
 ✕ La fréquence du La_4 vaut $f_{La_4} = 2f_{La_3} = 880 \text{ Hz}$
 ✕ Or, on raisonne ici avec les fréquences fondamentales $\left(f_1 = \sqrt{A} \frac{\pi}{2L^2}\right)$, on a donc :

$$\frac{f_{La_2}}{f_{La_3}} = \frac{L_{La_3}^2}{L_{La_2}^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f_{La_4}}{f_{La_3}} = \frac{L_{La_3}^2}{L_{La_4}^2} = 2$$

D'où :

$$L_{La_2} = \sqrt{2} L_{La_3} = 46.4 \text{ cm}$$

$$L_{La_4} = \frac{L_{La_3}}{\sqrt{2}} = 23.2 \text{ cm}$$

III.B.c Étude statique

17. BAM à la lame au repos :

- ✕ La force exercée par l'opérateur : $\vec{F} = -F \vec{u}_y$
- ✕ La réaction de l'appui en A : $\vec{R}_A = R_A \vec{u}_y$
- ✕ La réaction de l'appui en B : $\vec{R}_B = R_B \vec{u}_y$

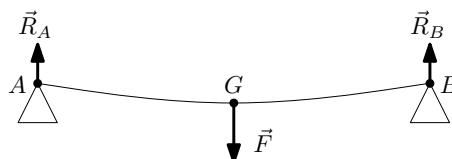


FIGURE 8

Le TRC appliqué à la lame donne :

$$\vec{F} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

Soit :

$$R_A + R_B = F$$

Le TMC appliqué à la lame en A fixe donne :

$$\overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$$

Soit :

$$-\frac{L}{2}F + LR_B = 0$$

D'où :

$$R_B = \frac{F}{2} \quad \text{et} \quad R_A = \frac{F}{2}$$

18. ✕ On applique le TRC et le TMC en A à l'élément $[AM]$ où $x_M = x \in \left[0, \frac{L}{2}\right[$

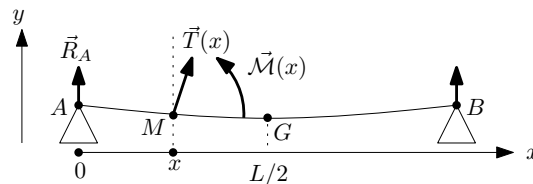


FIGURE 9

— Le BAM donne :

— La réaction de l'appui en A : $\vec{R}_A = R_A \vec{u}_y$

— La force exercée sur la droite de l'élément en M : $\vec{T}(x)$

— Le couple exercé sur la droite de l'élément en M : $\vec{M}(x)$

Noter que, par hypothèse, $\vec{N} = \vec{0}$ en M et en A et que $\vec{T}(A)$ et $\vec{M}(A)$ sont nuls car l'extrémité est libre.

— Le TRC appliqué à l'élément et projeté sur (Ox) donne :

$$R_A = -T(x)$$

— Le TMC appliqué à l'élément en A donne :

$$\vec{0} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T}(x) + \overrightarrow{AA} \wedge \vec{R}_A + \vec{M}(x)$$

Soit :

$$xT(x) + \mathcal{M}(x) = 0$$

— D'où :

$$T(x) = -R_A = -\frac{F}{2}$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{F}{2}x$$

✗ On applique le TRC et le TMC en B à l'élément $[BM]$ où $x_M = x \in \left[\frac{L}{2}, L\right]$

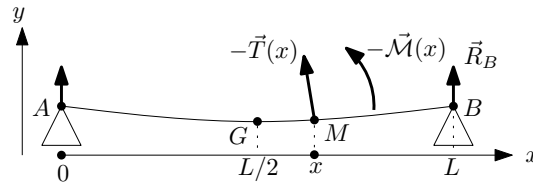


FIGURE 10

— Le BAM donne :

— La réaction de l'appui en B : $\vec{R}_B = R_B \vec{u}_y$

— La force exercée sur la gauche de l'élément en M : $-\vec{T}(x)$

— La couple exercé sur la gauche de l'élément en M : $-\vec{M}(x)$

Noter que, par hypothèse, $\vec{N} = \vec{0}$ en M et en B et que $\vec{T}(B)$ et $\vec{M}(B)$ sont nuls car l'extrémité est libre.

— Le TRC appliqué à l'élément et projeté sur (Ox) donne :

$$R_B = T(x)$$

— Le TMC appliqué à l'élément en B donne :

$$\vec{0} = -\vec{BM} \wedge \vec{T}(x) + \vec{BB} \wedge \vec{R}_B - \vec{M}(x)$$

Soit :

$$(L - x) T(x) - \mathcal{M}(x) = 0$$

— D'où :

$$T(x) = R_B = \frac{F}{2}$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{F}{2} (L - x)$$

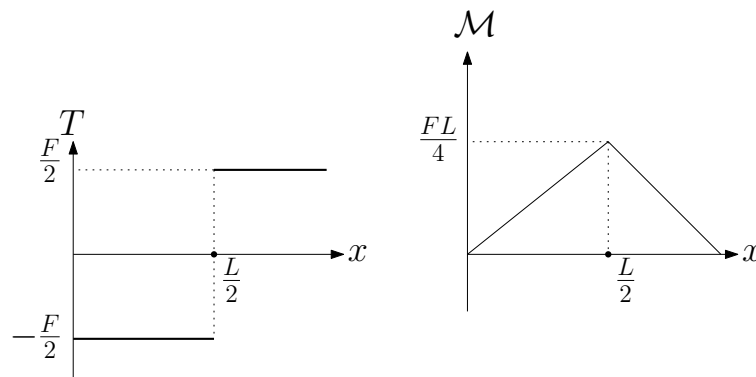


FIGURE 11

20. Conditions limites vérifiées par Y :

✗ $Y(0) = Y(L) = 0$

✗ $\alpha\left(\frac{L^-}{2}\right) = -\alpha\left(\frac{L^+}{2}\right)$ (sachant que le milieu est le point le plus bas et que α est continument dérivable).

21. Pour déterminer $Y(x)$, on peut partir de l'équation (5), ou de l'expression de $\mathcal{M}(x)$ déterminée précédemment :

$$\mathcal{M}(x) = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

✕ Pour $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$, on a donc :

$$\mathcal{M}(x) = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{F}{2}x$$

D'où :

$$Y(x) = \frac{F}{12\gamma}x^3 + Ax + B$$

Sachant que $Y(0) = 0$, on a : $B = 0$.

✕ Pour $x \in \left]\frac{L}{2}, L\right]$, on a donc :

$$\mathcal{M}(x) = \gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{F}{2}(L - x)$$

D'où :

$$Y(x) = \frac{F}{12\gamma}(L - x)^3 + A'x + B'$$

Sachant que $Y(L) = 0$, on a : $A'L + B' = 0$.

✕ Sachant que Y et $\alpha = \frac{\partial Y}{\partial x}$ sont continus en $x = \frac{L}{2}$, on a aussi :

$$Y\left(\frac{L^-}{2}\right) = Y\left(\frac{L^+}{2}\right) \Rightarrow \frac{F}{12\gamma}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + A\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F}{12\gamma}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + A'\left(\frac{L}{2}\right) - A'L \Rightarrow A = -A'$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}\left(\frac{L^-}{2}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x}\left(\frac{L^+}{2}\right) \Rightarrow \frac{F}{4\gamma}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + A = -\frac{F}{4\gamma}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + A' \Rightarrow A = -A' = -\frac{L^2 F}{16\gamma}$$

✕ On obtient finalement :

$$x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] : Y(x) = \frac{xF}{4\gamma}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{L^2}{4}\right)$$

$$x \in \left]\frac{L}{2}, L\right] : Y(x) = \frac{(L-x)F}{4\gamma}\left(\frac{(L-x)^2}{3} - \frac{L^2}{4}\right)$$

✕ On en déduit :

$$Y_M = |Y\left(\frac{L}{2}\right)| = \frac{L^3 F}{48\gamma} \quad (10)$$

III.B.d Aspect énergétique

22. Dans le modèle utilisé, la masse m_1 vibre avec une amplitude Y_M tandis que dans le cas réel, la masse m vibre en moyenne avec une amplitude inférieure à Y_M (les différents points de la lame vibrent avec une amplitude comprise entre 0 et Y_M). Pour avoir la même énergie, il faut donc prendre $m_1 < m$.

23. On fait le parallèle avec la relation donnée par l'équation 10 et la relation entre la force de rappel élastique et l'allongement (en amplitude) : $F = k_1 Y_M$. On en déduit :

$$k_1 = \frac{48\gamma}{L^3}$$

et donc :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{48\gamma}{m_1 L^3}}$$

24. L'énergie de vibration de la lame est donc de la forme :

$$U = \frac{1}{2} k_1 Y_M^2 = \frac{24\gamma}{L^3} Y_M^2$$

25. Une intensité de 60 dB à la distance d égale à 5 mètres correspond à une puissance :

$$\mathcal{P} = 4\pi d^2 \times I \text{ où } I = I_0 10^{\frac{I_{dB}}{10}}$$

Cette puissance correspond à l'énergie dissipée par la lame en une seconde (Δt) :

$$\mathcal{P} = \frac{U_0}{\Delta t} \Rightarrow Y_M = \sqrt{\frac{2U_0}{k_1}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}\Delta t}{k_1}}$$

26. La constante de raideur k_1 est déterminée à partir de la fréquence f du fondamental du La_3 :

$$k_1 = m_1 \omega^2 = \frac{m}{2} \times 4\pi^2 f^2 = 1 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

On trouve $\mathcal{P} = 3 \times 10^{-4} \text{ W}$ et :

$$Y_M = 3 \times 10^{-5} \text{ m}$$

27. La durée d'émission étant $\Delta t = 1 \text{ s}$, on peut estimer la largeur spectrale de la note :

$$\Delta f \times \Delta t \approx 1 \Rightarrow \Delta f \approx 1 \text{ Hz}$$

Et donc, par définition du facteur de qualité :

$$Q = \frac{f}{\Delta f} = 440$$

Ce facteur de qualité est non atteignable en électricité.

28. Pour que la lame reste au contact avec les appuis, il faut qu'au moment où l'élongation est la plus élevée, la poids soit encore prédominant :

$$k_1 Y_M < mg$$

Or $k_1 Y_M = 30 \text{ N}$ et $mg = 2.6 \text{ N}$: la lame décolle du cours du mouvement.

III.C Lampe encastrée : boîte à musique, clarinette, ou saxophone

III.C.a. Détermination des oscillations libres de la lame

29. ✕ En $x = 0$, la lame est fixée horizontalement : $Y(x, t) = 0$ et $\alpha = \left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{(0,t)} = 0$
- ✕ En $x = L$, la lame est libre : aucun moment ni aucune force ne s'applique sur elle : $M(L, t) = 0$ et $T(L, t) = 0$ et donc :

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{(L,t)} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \right|_{(L,t)} = 0$$

30. Si $KL \gg 1$ alors $\cosh KL$ tend vers l'infini et donc $\cos KL$ tend vers zéro, d'où :

$$KL = \frac{\pi}{2} + p\pi$$

Avec p entier naturel très grand devant 1.

31. On a une série de Fourier si les pulsations ω_n sont de la forme :

$$\omega_n = n\omega_1$$

Avec n entier naturel. Or $K \propto \sqrt{\omega}$, on a donc :

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{K_n^2}{K_1^2}$$

On a donc :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 6.25$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = 17.556$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_1} = 34.340$$

Les différentes pulsations ne sont donc pas les harmoniques du fondamental, on ne peut donc pas faire de série de Fourier.

IV.A Anharmonicité d'une corde réelle

L'équation de propagation de long de la corde est :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - A \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \quad (11)$$

32. On injecte $Y = f(x) \exp^{i\omega t}$ dans l'équation (11) et on trouve facilement l'équation différentielle vérifiée par f :

$$D \frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f(x) = 0 \quad (12)$$

Avec $k = \frac{\omega}{c}$.

33. L'équation caractéristique de l'équation (12) est :

$$Dr^4 - r^2 - k^2 = 0$$

D'où :

$$r^2 = \frac{1}{2D} (1 \pm \sqrt{1 + 4k^2 D})$$

On a donc deux cas :

$$r^2 = \frac{1}{2D} (1 + \sqrt{1 + 4k^2 D}) > 0 \Rightarrow r = \pm \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2D}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4k^2 D}}}_{K_R}$$

$$r^2 = \frac{1}{2D} (1 - \sqrt{1 + 4k^2 D}) < 0 \Rightarrow r = \pm i \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2D}} \sqrt{\sqrt{1 + 4k^2 D} - 1}}_{K_I}$$

D'où l'expression générale de $f(x)$:

$$f(x) = F_1 \sin(K_I x) + F_2 \cos(K_I x) + F_3 \sinh(K_R x) + F_4 \cosh(K_R x) \quad (13)$$

34. A chaque extrémité , $y = 0$ et $\mathcal{M} = 0$: La corde est fixée mais elle peut tourner librement, c'est une liaison pivot parfaite. On peut réaliser ça en enroulant la corde autour d'un axe.

35. ✕ $f(0) = 0$ donc :

$$F_2 + F_4 = 0$$

✕ $\frac{d^2 f}{dx^2}(0) = 0$ donc :

$$-K_I^2 F_2 + K_R^2 F_4 = 0$$

On en déduit :

$$F_2 = F_4 = 0$$

✕ $f(L) = 0$ donc :

$$F_1 \sin(K_I L) + F_3 \sinh(K_R L) = 0$$

✕ $\frac{d^2 f}{dx^2}(L) = 0$ donc :

$$-F_1 K_I^2 \sin(K_I L) + F_3 K_R^2 \sinh(K_R L) = 0$$

On en déduit :

$$F_1 \sin(K_I L) = F_3 \sinh(K_R L) = 0$$

Soit : $F_3 = 0$ et $\sin(K_I L) = 0$:

$$K_I = \frac{n\pi}{L}$$

D'où :

$$f_n(x) = F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

36. On a posé : $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$, on obtient donc :

$$\frac{n\pi}{L} = \frac{1}{\sqrt{2D}} \sqrt{\sqrt{1 + 4\left(\frac{2\pi\nu_n}{c}\right)^2} D - 1}$$

On extrait ν_n de cette expression :

$$\nu_n = \frac{c}{4\pi\sqrt{D}} \sqrt{\left(1 + 2D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)^2 - 1}$$

Soit, en développant le carré et en sortant $4D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ de la racine :

$$\nu_n = \frac{nc}{2L} \sqrt{1 + D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

On retrouve bien l'expression proposée avec :

$$B = \frac{\pi^2}{L^2} D$$

$$\nu_0 = \frac{c}{2L}$$

Sachant que $D = A/c^2$ et d'après les expressions de A et de c , on en déduit :

$$B = \frac{E\pi^3 r^4}{4L^2 N} = \frac{\pi^2 r^2 E}{16\rho L^4 \nu_0^2}$$

37. Pour réduire l'anharmonicité, il faut que B soit le plus petit possible. On peut diminuer E et r pour tendre vers une corde dans raideur ou augmenter N et L en gardant la même fréquence.

IV.B Piano droit, piano à queue

38.

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1 + B} \Rightarrow \nu_0 = \frac{\nu_1}{\sqrt{1 + B}}$$

$$\nu_{10} = \nu_0 \sqrt{1 + 100B} = 10\nu_1 \frac{\sqrt{1 + 100B}}{\sqrt{1 + B}}$$

En supposant que l'on dispose de suffisamment de chiffres significatifs, on obtient :

$$\nu_{10} = 2238 \text{ Hz}$$

$$\nu_{10}^{\text{parfaite}} = 10\nu_1 = 2200 \text{ Hz}$$

$$\nu_{10+1/2\text{ton}}^{\text{parfaite}} = \nu_{10}^{\text{parfaite}} \times \sqrt[12]{2} = 2330 \text{ Hz}$$

Ainsi :

$$\nu_{10}^{parfaite} < \nu_{10} < \nu_{10+1/2\text{ ton}}^{parfaite}$$

En sachant que ν_{10} est plus proche de $\nu_{10+1/2\text{ ton}}^{parfaite}$ que de $\nu_{10}^{parfaite}$, une oreille attentive peut donc entendre la différence et détecterait le son non harmonique.

Pour illustrer l'écart, on peut calculer :

$$\frac{\nu_{10} - \nu_{10}^{parfaite}}{\nu_{10+1/2\text{ ton}}^{parfaite} - \nu_{10}^{parfaite}} = 0.3 = 30\%$$

$\Rightarrow \nu_{10}$ est au tiers de l'intervalle $[\nu_{10}^{parfaite}, \nu_{10+1/2\text{ ton}}^{parfaite}]$.

39.

$$B = \frac{\pi^2 r^2 E}{16 \rho \nu_0^2 L^4} \Rightarrow \frac{B_{queue}}{B_{droit}} = \left(\frac{r_{queue}}{r_{droit}} \right)^2 \left(\frac{L_{droit}}{L_{queue}} \right)^2 = 1.7 \times 10^{-2}$$

B est donc 59 fois plus petit pour le piano à queue que pour le piano droit : les fréquences propres du piano droit se rapprochent de celles d'une corde parfaite.

Pour illustrer l'écart, on peut faire le même calcul que précédemment mais cette fois pour le piano à queue :

$$\frac{\nu_{10} - \nu_{10}^{parfaite}}{\nu_{10+1/2\text{ ton}}^{parfaite} - \nu_{10}^{parfaite}} = 0.005 = 0.5\%$$

$\Rightarrow \nu_{10}$ est au $\frac{1}{200}$ de l'intervalle $[\nu_{10}^{parfaite}, \nu_{10+1/2\text{ ton}}^{parfaite}]$. $\Rightarrow$ inaudible.

40. La tension totale exercée sur le cadre est :

$$\mathcal{T} = 3 \times 88 \times N$$

où :

$$N = \mu c^2 = \rho \times \pi r^2 \times (2L\nu_0)^2$$

On trouve :

✗ $N = 5.1 \times 10^2$ N pour un piano droit.

✗ $N = 2.2 \times 10^3$ N pour un piano à queue.

Finalement, on obtient :

✗ $\mathcal{T} = 1.4 \times 10^5$ N pour un piano droit : 14 tonnes !

✗ $\mathcal{T} = 5.8 \times 10^5$ N pour un piano à queue : 58 tonnes !