

CINEMATIQUE DES FLUIDES



Simulation de l'écoulement de l'air autour d'un cycliste

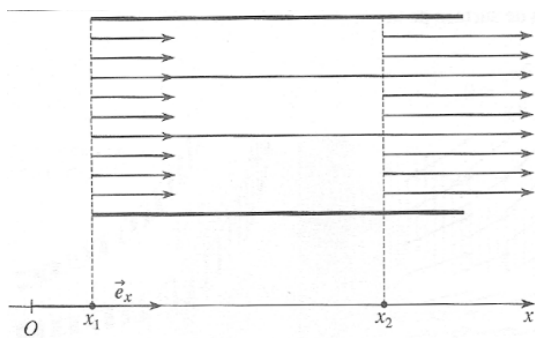
I. CARACTERISTIQUES DU CHAMP DES VITESSES DANS UN FLUIDE.

1. DESCRIPTION LOCALE : EVOLUTION DE LA PARTICULE FLUIDE.

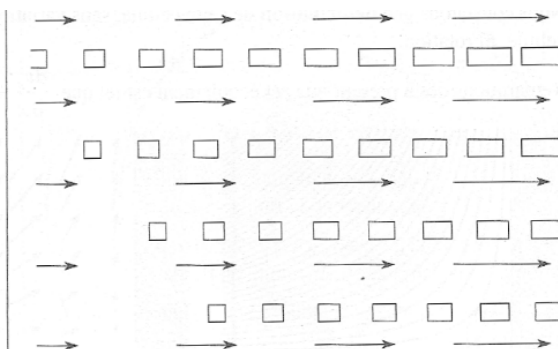
EXEMPLE 1 : DILATATION.

Écoulement unidimensionnel permanent : gaz dans une conduite cylindrique.

Champ des vitesses : $\vec{V} = V_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \vec{e}_x$



Simulation d'un écoulement dans une tuyère



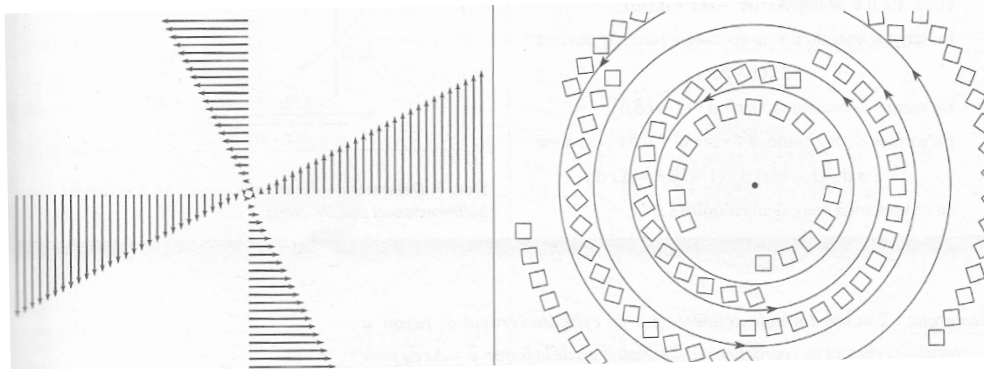
Visualisation de la dilatation des cellules

⇒ Les calculs montrent que $\text{div}(\vec{V}) = \frac{V_0}{L} \neq 0$ et que $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$: Les particules fluides se dilatent et sont en translation.

EXEMPLE 2 : ROTATION.

Champ des vitesses à l'intérieur d'une tornade

Champ des vitesses : $\vec{V} = A \cdot r \vec{e}_\theta$



Visualisation du champ des vitesses d'un écoulement au centre d'une tornade

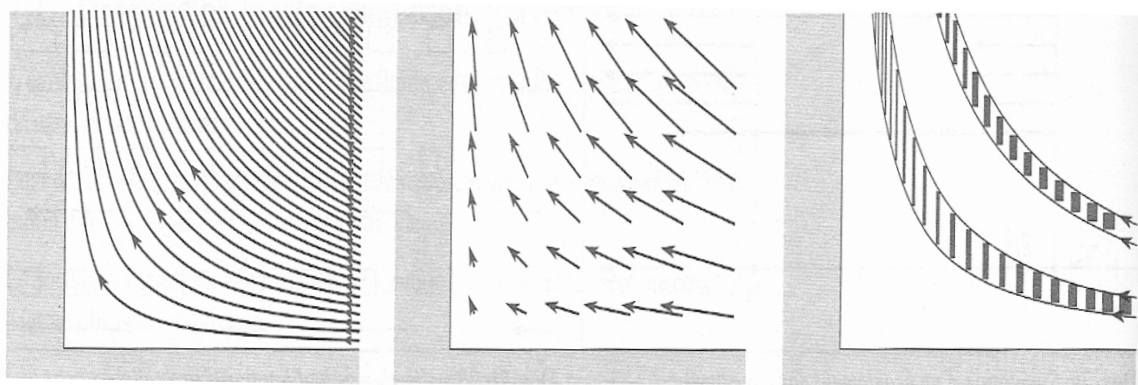
Mise en évidence des transformations d'une cellule lors de cet écoulement : la cellule tourne sans déformation

⇒ Les calculs montrent que $\text{div}(\vec{V}) = 0$ et que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 2A\vec{e}_z$: les particules fluides gardent un volume constant et elles ont un mouvement de rotation propre.

EXEMPLE 3 : DEFORMATION.

Écoulement le long d'un dièdre

Champ des vitesses : $\vec{V} = -kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y$



Lignes de courant de l'écoulement bidimensionnel

Champ des vitesses de l'écoulement bidimensionnel

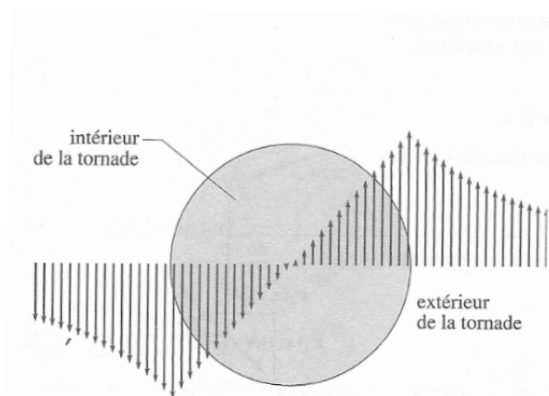
Déformation des cellules dans l'écoulement bidimensionnel

⇒ Les calculs montrent que $\text{div}(\vec{V}) = 0$ et que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$.

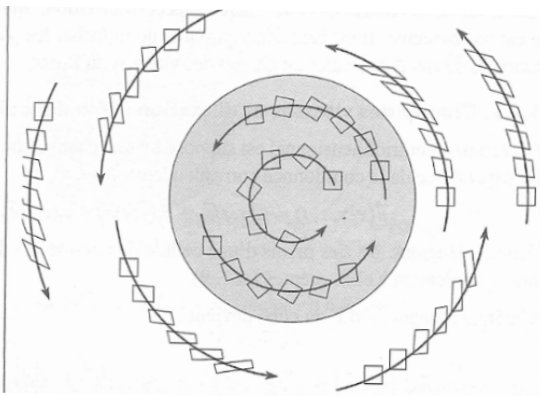
⇒ Les particules fluides sont en translation pure et elles sont déformées tout en gardant un volume constant.

EXEMPLE 4 : CHAMP DES VITESSES A L'INTERIEUR ET A L'EXTERIEUR D'UNE TORNADO.

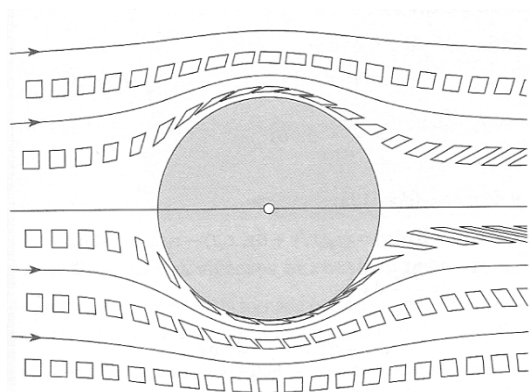
Champ des vitesses :
$$\begin{cases} \vec{V}(r \leq a) = r\Omega\vec{e}_\theta \\ \vec{V}(r \geq a) = \frac{a^2\Omega}{r}\vec{e}_\theta \end{cases}$$



Champ des vitesses d'un écoulement à l'intérieur et à l'extérieur d'une tornade

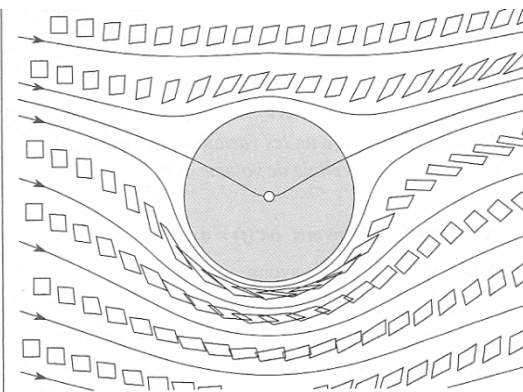


Mise en évidence des transformations des cellules lors de cet écoulement

EXEMPLE 5 : ECOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHERE

Écoulement d'un fluide autour d'une sphère dans un plan méridien :

Visualisation des déformations des cellules lors de cet écoulement



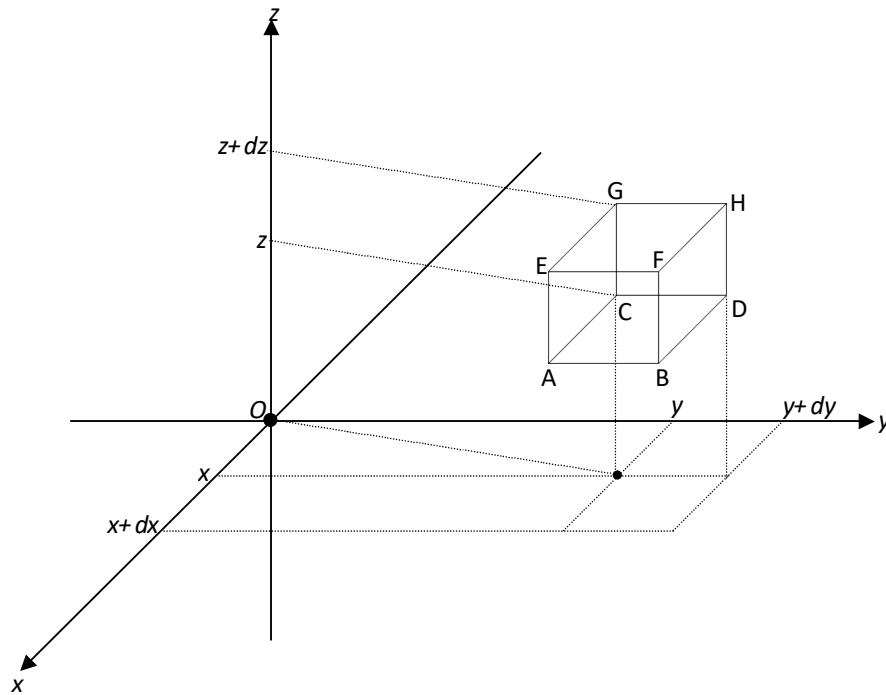
Écoulement d'un fluide autour d'un cylindre en rotation :

Visualisation des déformations des cellules lors de cet écoulement

2. RELATION ENTRE LES PHENOMENES DE DILATATION ET DE ROTATION ET LE CHAMP DE VITESSES.**a. DILATATION ET DIVERGENCE DE $\vec{V}$** **EXEMPLE**

Soit un écoulement dont le champ des vitesses s'écrit : $\vec{V} = V_x(x, t)\vec{e}_x + V_y(y, t)\vec{e}_y + V_z(z, t)\vec{e}_z$.

Soit une particule fluide en (x, y, z) de volume $d\tau = dx dy dz$ dont les sommets sont A, B, C, D, E, F, G et H. Etudions l'évolution de la position des arêtes entre t et $t+dt$.



Arêtes de longueur dx :

Arête AC :
$$C \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \Rightarrow C \begin{vmatrix} x + V_x(x, t)dt \\ y + V_y(y, t)dt \\ z + V_z(z, t)dt \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} x + dx \\ y \\ z \end{vmatrix} \Rightarrow A \begin{vmatrix} x + dx + V_x(x + dx, t)dt \\ y + V_y(y, t)dt \\ z + V_z(z, t)dt \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} dx + \underbrace{(V_x(x + dx, t) - V_x(x, t)) dt}_{\frac{\partial V_x}{\partial x} dx} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\|CA\| = dx \Rightarrow \|CA\| = dx' = dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt$$

Arête BD :
$$D \begin{vmatrix} x \\ y + dy \\ z \end{vmatrix} \Rightarrow C \begin{vmatrix} x + V_x(x, t)dt \\ y + dy + V_y(y + dy, t)dt \\ z + V_z(z, t)dt \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z \end{vmatrix} \Rightarrow A \begin{vmatrix} x + dx + V_x(x + dx, t)dt \\ y + dy + V_y(y + dy, t)dt \\ z + V_z(z, t)dt \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{DB} \begin{vmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB} \begin{vmatrix} dx + \underbrace{(V_x(x + dx, t) - V_x(x, t)) dt}_{\frac{\partial V_x}{\partial x} dx} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\|DB\| = dx \Rightarrow \|DB\| = dx' = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$$

De même pour les arêtes EG et FH :

$$\|EG\| = dx \Rightarrow \|EG\| = dx' = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$$

$$\|FH\| = dx \Rightarrow \|FH\| = dx' = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$$

Conclusion : les arêtes de longueur dx évoluent toutes de la même manière entre t et $t+dt$: $dx \Rightarrow dx' = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$

Arêtes de longueur dy :

De même :

Les arêtes de longueur dy évoluent toutes de la même manière entre t et $t+dt$: $dy \Rightarrow dy' = dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt$

Arêtes de longueur dz :

De même :

Les arêtes de longueur dz évoluent toutes de la même manière entre t et $t+dt$: $dz \Rightarrow dz' = dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt$

Variation de $d\tau$ entre t et $t+dt$:

$$\delta(d\tau) = dx' dy' dz' - dx dy dz$$

$$\Rightarrow \delta(d\tau) = \left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt\right) \left(dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt\right) \left(dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt\right) - dx dy dz$$

$$\Rightarrow \delta(d\tau) = \left[\left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt\right) \left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt\right) \left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right) - 1\right] dx dy dz$$

Soit, en négligeant les termes d'ordre 1 :

$$\delta(d\tau) = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right] dx dy dz$$

$$\Rightarrow \delta(d\tau) = \text{div}(\vec{V}) dt d\tau$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{V}) = \frac{1}{dt} \frac{\delta(d\tau)}{d\tau}$$

GENERALISATION :

LA DIVERGENCE DE LA VITESSE D'ÉCOULEMENT REPRÉSENTE LA VITESSE DE DILATATION DE LA PARTICULE DE FLUIDE :

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{1}{dt} \frac{\delta(d\tau)}{d\tau}$$

Si $\text{div}(\vec{V}) = 0$ alors $\delta(d\tau) = 0 \Rightarrow d\tau = \text{Cste}$ et comme la masse de la particule fluide $dm = \rho d\tau$ ne varie pas, on en déduit que $\rho = \text{Cste}$.

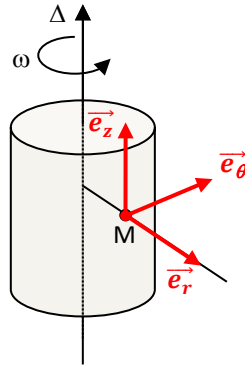
SI $\text{div}(\vec{V}) = 0$ ALORS L'ÉCOULEMENT EST INCOMPRESSIBLE.

b. ROTATION ET ROTATIONNEL.

EXEMPLE.

Reprenons le champ des vitesses au centre de la tornade : $\vec{V}(r) = ar\vec{e}_\theta$.

$\Rightarrow$ Ce champ de vitesse est identique à celui d'un solide en rotation autour d'un axe fixe¹ : $\vec{V}(r) = \omega r\vec{e}_\theta$



$$\Rightarrow \text{Calculons } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) : \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{vmatrix} = 2\omega\vec{e}_z = 2\vec{\omega}$$

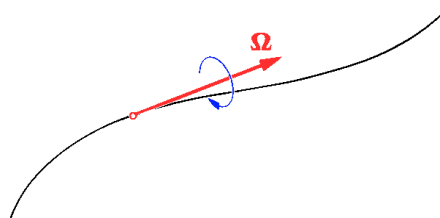
GENERALISATION.

LOCALEMENT LE CHAMP DES VITESSES D'UN FLUIDE RENSEIGNE SUR L'EXISTENCE DE TOURBILLONS DANS CE FLUIDE PAR L'INTERMEDIAIRE DE SON ROTATIONNEL.

LE VECTEUR TOURBILLON $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ MESURE LA ROTATION LOCALE DU FLUIDE.

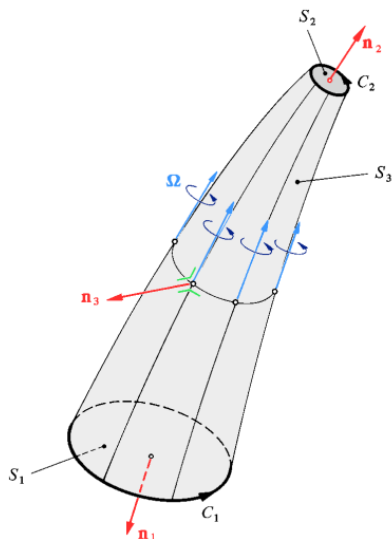
PROPRIETES DU VECTEUR ROTATION

- Dans le cas d'un écoulement plan : $\vec{V}(x, y, t) = V_x(x, y, t)\vec{e}_x + V_y(x, y, t)\vec{e}_y$
 $\Rightarrow \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\Omega} \text{ est perpendiculaire au plan de l'écoulement.}$
- Les lignes de champ de $\vec{\Omega}$ sont appelées **filts tourbillonnaires** :



¹ Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe autour d'un axe Δ , la vitesse en un point M appartenant au solide s'écrit, en coordonnées cylindrique : $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\vec{e}_\theta$ où $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ est le vecteur rotation.

- Un **tube tourbillonnaire** est la surface engendrée par l'ensemble des lignes tourbillonnaires qui s'appuient sur un contour fermé C choisi arbitrairement dans le fluide. (analogue au tube de courant).
- $\text{div}(\vec{\Omega}) = 0$
 $\Rightarrow \vec{\Omega}$ est à flux conservatif : Le débit (ou le flux) de $\vec{\Omega}$ est constant le long d'un tube tourbillonnaire.



$\Rightarrow$ Un tube tourbillonnaire ne peut pas commencer ou se terminer dans un fluide.

- On en déduit les propriétés des fils tourbillonnaires :
 - (1) Les lignes de champ de $\vec{\Omega}$ ont une longueur infinie.
 - (2) Les lignes de champ de $\vec{\Omega}$ suivent une courbe fermée.
 - (3) Les lignes commencent ou se terminent aux frontières qui limitent le fluide.

3. CARACTERISTIQUES D'UN ECOULEMENT.

a. ECOULEMENT STATIONNAIRE.

DEFINITION

UN ECOULEMENT DANS LEQUEL LE CHAMP EULERIEN DES VITESSES EST INDEPENDANT DU TEMPS EST APPELE ECOULEMENT STATIONNAIRE : $\vec{V}(M, t) = \vec{V}(M)$ ET $\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \\ \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{V} \end{cases}$

CONSEQUENCES

- Dans le cas d'un régime stationnaire, il y a identité entre les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission.
- Dans le cas d'un régime stationnaire, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \oint \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\Rightarrow$ LE DEBIT MASSIQUE SE CONSERVE A TRAVERS TOUTE SECTION D'UN TUBE DE COURANT DANS LE CAS D'UN REGIME STATIONNAIRE.

² D'après le théorème d'Ostrogradsky

b. ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE.

DEFINITION

UN FLUIDE EST DIT EN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE SI SA MASSE VOLUMIQUE EST CONSTANTE AU COURS DU MOUVEMENT, CE QUI SE TRADUIT PAR UNE DERIVEE PARTICULAIRE DU CHAMP SCALAIRE DE MASSE VOLUMIQUE NULLE (DESCRIPTION EULERIENNE) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \xrightarrow{\rho \text{ constante}} \text{div}(\vec{V}) = 0$$

Ou :

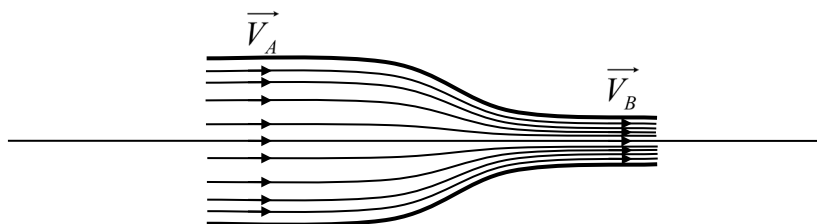
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0 \xrightarrow{\rho \text{ constante}} \text{div}(\vec{V}) = 0$$

CONSEQUENCES

- $\text{div}(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow^3 \oint \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$: Le champ des vitesses est à flux conservatif.

$\Rightarrow$ LE DEBIT VOLUMIQUE SE CONSERVE DANS TOUTE SECTION D'UN TUBE DE COURANT DANS LE CAS D'UN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE.

- Dans ce type d'écoulement, **les lignes de courant se resserrent aux endroits de plus forte vitesse.**



c. ECOULEMENT TOURBILLONNAIRE/ECOULEMENT NON TOURBILLONNAIRE.

DEFINITION.

UN ECOULEMENT EST NON TOURBILLONNAIRE, OU IRROTATIONNEL, SI LE VECTEUR TOURBILLON EST NUL PARTOUT. UN ECOULEMENT EST TOURBILLONNAIRE, OU ROTATIONNEL, SI IL EXISTE AU MOINS UN POINT TEL QUE : $\vec{\text{rot}}(\vec{V}) \neq \vec{0}$.

CONSEQUENCES

- Dans le cas d'un écoulement irrotationnel on a : $\vec{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$.
- $\Rightarrow^4$ Le champ des vitesses est à circulation conservative : $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$
- $\Rightarrow$ Les lignes de courant et les tubes de champ sont toujours ouverts.
- Sachant que $\vec{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$, on en déduit qu'il existe un champ scalaire $\varphi(r)$, appelé potentiel des vitesses, tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$: l'écoulement est alors dit potentiel.

UN ECOULEMENT IRROTATIONNEL EST APPELE AUSSI ECOULEMENT POTENTIEL : $\vec{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \varphi / \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$

³ D'après le théorème d'Ostrogradsky

⁴ D'après le théorème de Stokes

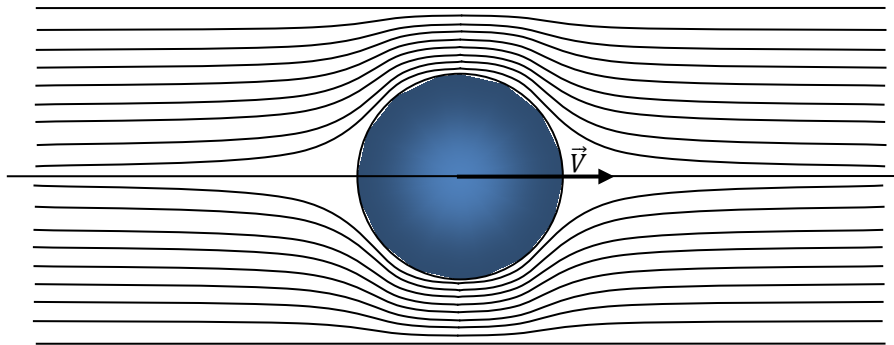
- Notons que pour que l'écoulement soit irrotationnel, il faut que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$ en tout point de l'espace et qu'il n'existe pas de point singuliers où $\vec{V}$ ne soit pas défini (Cas du Vortex).

4. CONDITIONS LIMITES.

a. CONDITIONS LIMITES A L'INFINI.

EXEMPLES

- Considérons un cylindre en translation dans un fluide :
⇒ Loin du cylindre, on peut considérer que le fluide est au repos



- Dans le cas de la houle, le mouvement de l'eau est en surface
⇒ On peut considérer que le fond de l'océan est au repos.

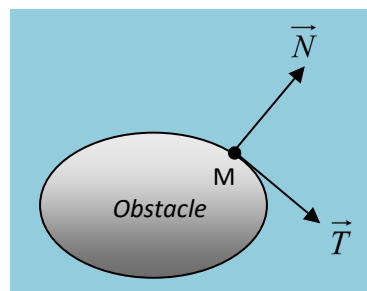
CONDITIONS LIMITES A L'INFINI.

Le modèle des conditions limites à l'infini sera adopté chaque fois qu'il sera possible de se placer à des distances grandes devant les dimensions caractéristiques du problème (taille d'un obstacle...)

b. CONDITIONS LIMITES SUR UN OBSTACLE.

CONDITIONS LIMITES SUR UN OBSTACLE FIXE.

Soit un obstacle fixe, dans le référentiel d'étude, placé dans un fluide en écoulement. Soit un point M du fluide au voisinage immédiat de l'obstacle. Soit $\vec{N}$ le vecteur perpendiculaire à la surface de l'obstacle en M :



Alors la vitesse en M ne peut pas avoir de composante normale à l'obstacle : $\vec{V}(M \in \text{fluide}) \cdot \vec{N} = 0$

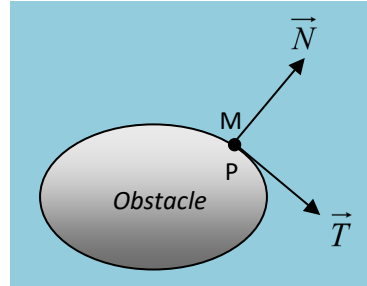
⇒ La vitesse du fluide en M est donc de la forme : $\vec{V}(M \in \text{fluide}) = V(M, t) \vec{T}$

En effet, si ce n'était pas le cas, le fluide pénétrerait dans l'obstacle ou, à l'inverse, un vide serait créé entre la particule fluide et l'obstacle.

LA COMPOSANTE NORMALE DE LA VITESSE D'UN FLUIDE PAR RAPPORT A UN OBSTACLE FIXE EST NULLE.

CONDITIONS LIMITES SUR UN OBSTACLE MOBILE.

Soit un obstacle mobile, dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude, placé dans un fluide en écoulement. Soit un point M du fluide au voisinage immédiat de l'obstacle et soit P le point coïncidant avec M appartenant à l'obstacle. On note $\mathcal{R}_p$ le référentiel lié au point P et en translation dans le référentiel $\mathcal{R}$. Soit $\vec{N}$ le vecteur perpendiculaire à la surface de l'obstacle en M :



Alors, dans le référentiel $\mathcal{R}_p$, la vitesse de la particule fluide en M ne peut avoir de composante normale : $\vec{V}(M \in \text{fluide})_{\mathcal{R}_p} \cdot \vec{N} = 0$

Or, d'après la loi de composition des vitesses, on a : $\vec{V}(M \in \text{fluide})_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{V}(M \in \text{obstacle})_{\mathcal{R}}}_{\vec{V}(P)_{\mathcal{R}} = \vec{V}_e} + \vec{V}(M \in \text{fluide})_{\mathcal{R}_p}$

$\Rightarrow$ Soit, en projetant sur $\vec{N}$: $\vec{V}(M \in \text{fluide})_{\mathcal{R}} \cdot \vec{N} = \vec{V}_e \cdot \vec{N} + \underbrace{\vec{V}(M \in \text{fluide})_{\mathcal{R}_p} \cdot \vec{N}}_0$

$\Rightarrow$ D'où : $\vec{V}(M \in \text{fluide})_{\mathcal{R}} \cdot \vec{N} = \vec{V}_e \cdot \vec{N}$

DANS LE REFERENTIEL D'ETUDE, LES VITESSES NORMALES DE L'OBSTACLE ET LA PARTICULE FLUIDE SONT IDENTIQUES.

II. EXEMPLE D'ÉCOULEMENT TOURBILLONNAIRE : LA TORNADE.



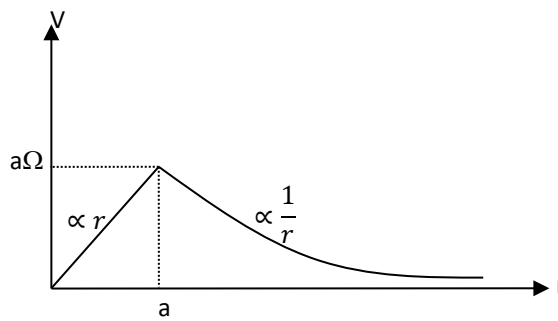
Tornado observée à Hyères (France) en novembre 2008.

1. CHAMP DES VITESSES.

- Dans une tornade, l'écoulement du fluide (air), présente une symétrie de révolution autour d'un axe (axe noté Oz)

$\Rightarrow$ On se place en coordonnées cylindriques.

- On admet que le champ des vitesses est de la forme :
$$\begin{cases} \vec{V}(r \leq a) = r\Omega \vec{e}_\theta \\ \vec{V}(r \geq a) = \frac{a^2\Omega}{r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$
- On obtient alors le graphe suivant :



⇒ La vitesse est maximale en a .

- Le calcul du rotationnel du champ des vitesses donne⁵ :

$$\begin{cases} r \leq a : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 2\Omega \vec{e}_z \\ r \geq a : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0} \end{cases}$$

Ainsi, il existe un vecteur tourbillon à l'intérieur de la tornade ($\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, uniforme) et nul partout ailleurs.

⇒ Une tornade correspond bien à un écoulement tourbillonnaire.

- Notons que le champ des vitesses étant indépendant du temps, l'écoulement est stationnaire et lignes de courant et trajectoires sont confondues : ce sont des cercles d'axe (Oz).

2. CHAMP DES ACCELERATIONS.

METHODE EULERIENNE.

Pour déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ en un point M de l'écoulement, on peut utiliser la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} &= \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\vec{0}} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})}_{2\vec{\Omega}} \wedge \vec{V} \\ \Rightarrow \begin{cases} r \leq a : \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(r\Omega \vec{e}_\theta) \wedge r\Omega \vec{e}_\theta = -r\Omega^2 \vec{e}_\theta \\ r \geq a : \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\Omega^2 a^4}{2r^2} \right) + 2 \cdot \underbrace{\vec{0} \wedge \frac{a^2 \Omega}{r} \vec{e}_\theta}_{\vec{0}} = -\frac{\Omega^2 a^4}{r^3} \vec{e}_r \end{cases} \end{aligned}$$

METHODE LAGRANGIENNE.

Pour déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ en un point M de l'écoulement, on peut utiliser l'accélération d'une particule fluide :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

- $r \leq a : \vec{V}(M) = r\Omega \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r = \text{cste} \\ \dot{\theta} = \Omega = \text{cste} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{e}_\theta = -r\Omega^2 \vec{e}_r$$

⁵ On peut utiliser : $\overrightarrow{\text{rot}}(f(r) \vec{e}_\theta) = f(r) \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{e}_\theta)}_{\frac{\vec{e}_z}{r}} + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(f(r))}_{\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r} \wedge \vec{e}_\theta = \left(\frac{f(r)}{r} + \frac{df}{dr} \right) \vec{e}_z$

$$\bullet \quad r \geq a : \vec{V}(M) = \frac{\Omega a^2}{r} \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r = cste \\ r \dot{\theta} = \frac{\Omega a^2}{r} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\Omega a^2}{r^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{e}_\theta = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{\Omega^2 a^4}{r^3} \vec{e}_r$$

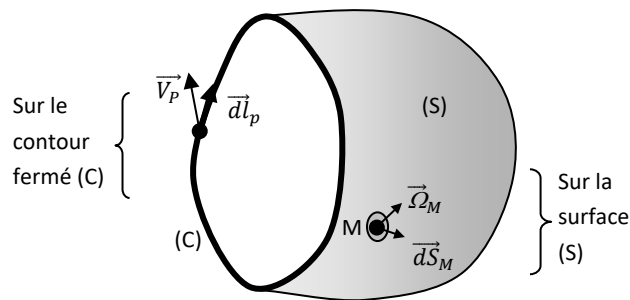
$\Rightarrow$ On retrouve bien sur la même accélération avec les deux méthodes.

3. DEFINITION D'UNE TORNADE A PARTIR DE SON VECTEUR TOURBILLON.

UNE TORNADE PEUT ETRE DEFINIE COMME UN ECOULEMENT CARACTERISE PAR LE VECTEUR TOURBILLON $\vec{\Omega}$, TEL QUE : $\vec{\Omega}(r \leq a) = \Omega \vec{e}_z$ ET $\vec{\Omega}(r \geq a) = \vec{0}$.

En effet, la donnée de $\vec{\Omega}$ permet de retrouver le champ des vitesses de la tornade :

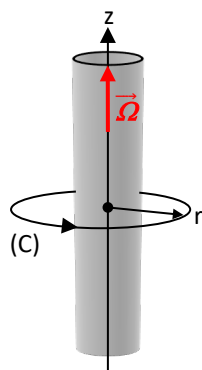
- L'équivalent intégral de $\text{rot}(\vec{V}) = 2\vec{\Omega}$ est $\oint_{(C)} \vec{V}_P \cdot d\vec{l}_P = 2 \iint_S \vec{\Omega}_M \cdot d\vec{S}_M$ où S est une surface s'appuyant sur le contour fermé (C) :



$\Rightarrow$ LA RELATION $\oint_{(C)} \vec{V}_P \cdot d\vec{l}_P = 2 \iint_S \vec{\Omega}_M \cdot d\vec{S}_M$ EST L'EQUIVALENT DU THEOREME D'AMPERE :

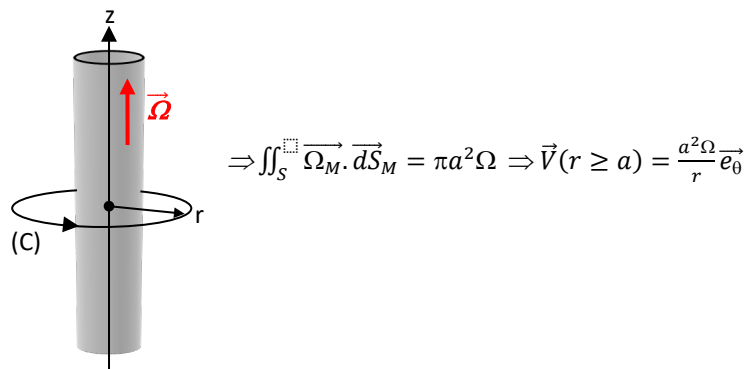
LA CIRCULATION DE LA VITESSE SUR UN CONTOUR FERME EST EGALE A DEUX FOIS LE FLUX DU VECTEUR TOURBILLON A TRAVERS TOUTE SURFACE S'APPUYANT SUR CE CONTOUR FERME (LE FLUX ETANT COMPTE POSITIVEMENT S'IL SORT PAR LA FACE « NORD » DU CONTOUR).

- Le vecteur tourbillon étant suivant l'axe (Oz), on en déduit que le champ des vitesses est orthoradial : $\vec{V} = V(r) \vec{e}_\theta$, on choisit pour (C) le cercle d'axe (Oz) et de rayon r :

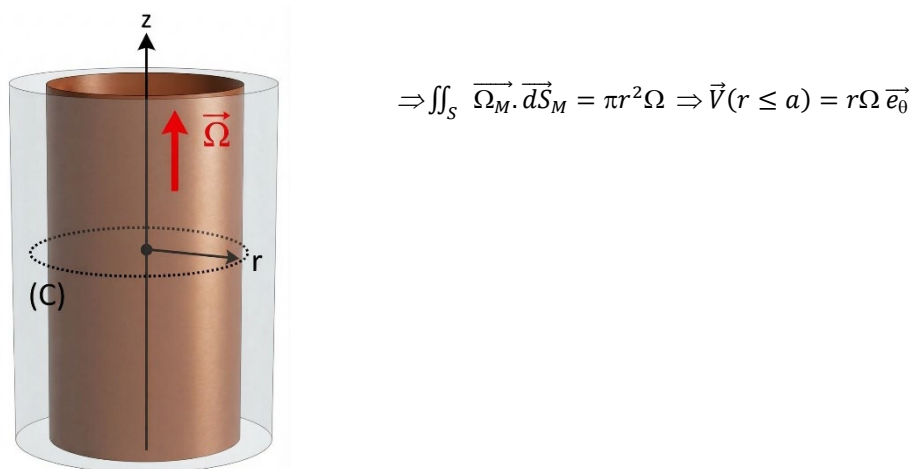


$$\Rightarrow \oint_{(C)} \vec{V}_P \cdot d\vec{l}_P = 2\pi r V(r)$$

- Cas où $r \geq a$:



- Cas où $r \leq a$:



$\Rightarrow$ On retrouve bien le champ des vitesses de la tornade.

4. CAS PARTICULIER DU VORTEX.

PASSAGE DE LA TORNADO AU VORTEX

- Considérons une tornade caractérisée par le champ de vitesse :
$$\begin{cases} r \leq a : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 2\Omega \vec{e}_z \\ r \geq a : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La circulation du champ des vitesses à l'extérieur de la tornade est : $C = 2\pi a^2 \Omega$

$\Rightarrow$ C'est une constante qui peut caractériser la tornade.

- Imaginons le cas d'une tornade où $a \rightarrow 0$ et $\Omega \rightarrow \infty$ tout en maintenant C constante
 $\Rightarrow$ La tornade devient un Vortex.

UN VORTEX EST UN ECOULEMENT DE FLUIDE CARACTERISE PAR LE CHAMP DES VITESSES : $\forall r > 0 : \vec{V} = \frac{C}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

ATTENTION CE NOUVEAU CHAMP DES VITESSES EST TOURBILLONNAIRE CAR MEME SI $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$ POUR $r > 0$, LE VECTEUR VITESSE N'EST PAS DEFINI EN ZERO ! (SINGULARITE EN $r = 0$)

Ainsi, il ne faut pas s'étonner du paradoxe : $\oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = C \neq 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$

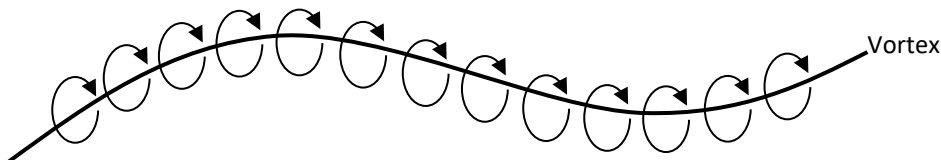
Dans un vortex, les lignes de courant sont fermées et entourent la singularité.

LIGNES TOURBILLONNAIRES ET VORTEX.

D'après ce qui précède, on peut dire que :

UNE LIGNE VORTEX EST UNE LIGNE TOURBILLONNAIRE ISOLEE SUR LAQUELLE :

- LE MODULE DU VECTEUR TOURBILLON EST INFINI.
- LA CIRCULATION DU VECTEUR VITESSE SUR TOUT CONTOUR ENTOURANT LA LIGNE EST CONSTANTE
- EN DEHORS DE LA LIGNE, LE VECTEUR TOURBILLON EST NUL

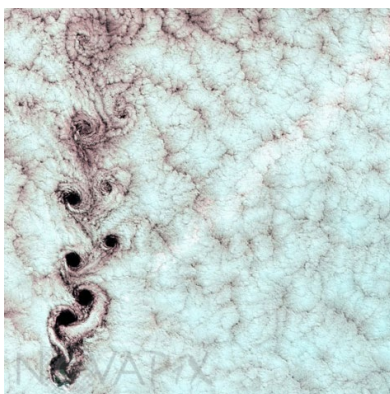


5. EXEMPLES.

UN CHAMP DES VITESSES DE LA FORME :
$$\begin{cases} \vec{V}(r \leq a) = r\Omega \vec{e}_\theta \\ \vec{V}(r \geq a) = \frac{a^2\Omega}{r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$
 S'INTERPRETE PHYSIQUEMENT COMME CELUI D'UN NOYAU DE FLUIDE DE RAYON A TOURNANT EN BLOC ET QUI ENGENDRE AU DELA DE SON RAYON UN MOUVEMENT STRICTEMENT IRROTATIONNEL.

Ces structures tourbillonnaires se rencontrent dans de nombreux écoulement :

- Sillage d'un corps épais avec en particulier les tourbillons alternés de Von Karman (Voir MF4) :



Allée de tourbillons de Von Karman dans les nuages provoquée par la rencontre entre le vent et le pic montagneux de l'île Alejandro Selkirk (archipel Juan Fernández) au large du Chili. Image en fausses couleurs obtenue par le satellite Landsat 7 le 15 septembre 1999.

- Mise en vitesse d'un fluide visqueux autour d'un profil.
- Tornades et trombes.

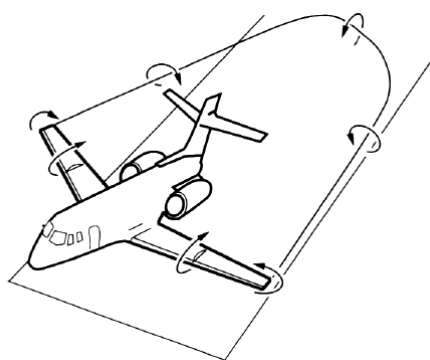


Une trombe marine est une colonne d'air mélangé d'eau en rotation, formant un entonnoir nuageux, au-dessus d'une étendue d'eau

- Vidange d'un liquide dans un réservoir cylindrique par un orifice central

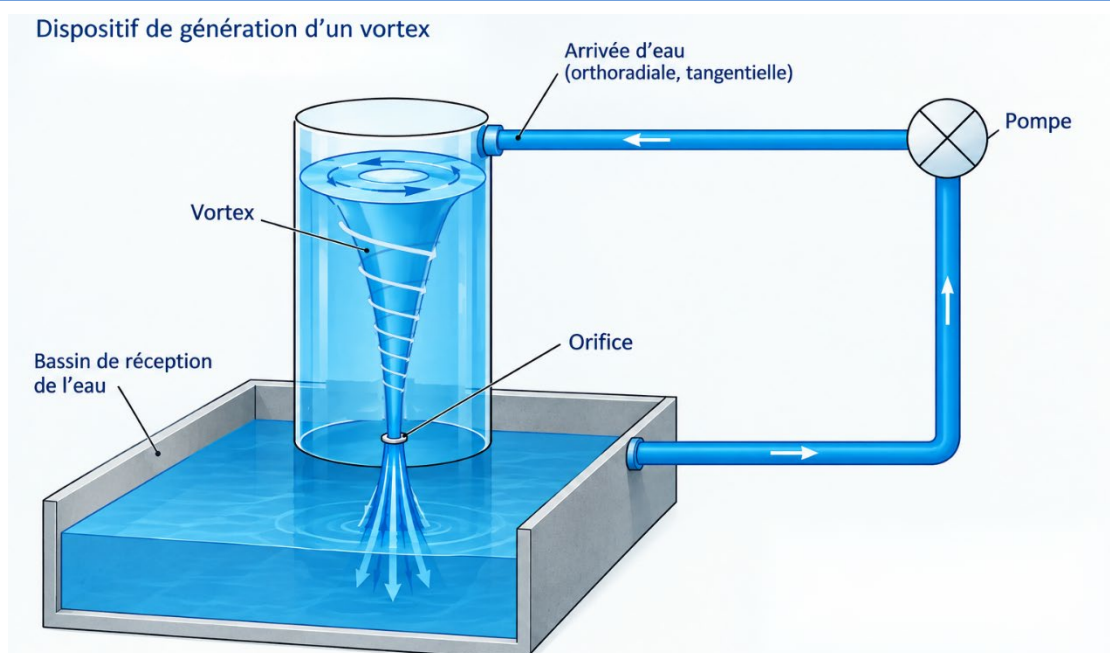


- Vortex avion :

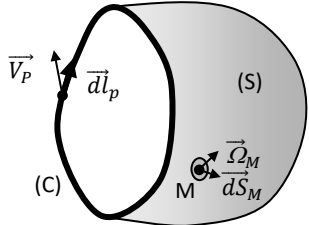
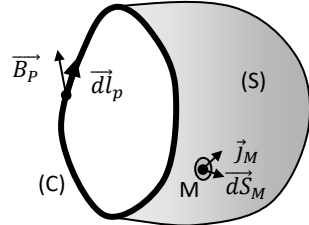
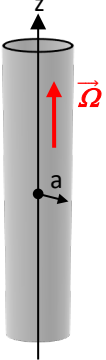
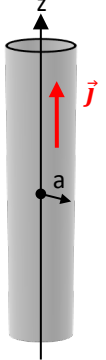
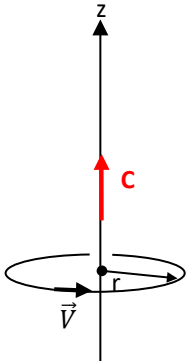
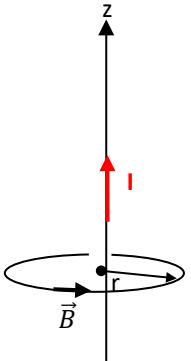
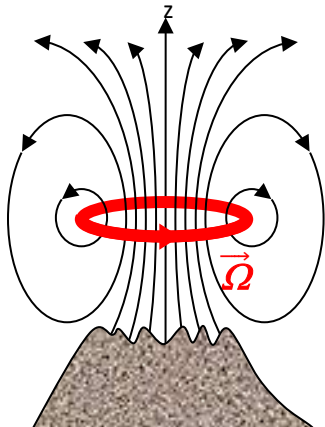
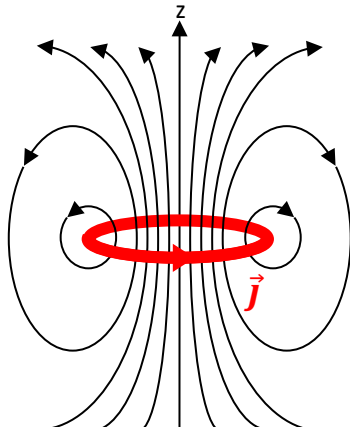


Autour des ailes d'un avion, on observe une circulation d'air : elle est le résultat de l'écoulement de la surpression (intrados) vers la dépression (extrados). Au bout des ailes, ce déplacement d'air forme alors une traînée tourbillonnaire que l'on voit aux extrémités des ailes, et que l'on appelle « Vortex ».

MISE EN ŒUVRE EXPERIMENTALE :



6. ANALOGIES MAGNETOSTATIQUE/ ECOULEMENT ROTATIONNEL COMPRESSIBLE.

Ecoulement rotationnel incompressible	Magnétostatique (ARQS)
$\text{div} \vec{V} = 0$ $\text{rot} \vec{V} = 2\vec{\Omega}$ $\oint_{(C)} \vec{V}_P \cdot d\vec{l}_P = 2 \iint_S \vec{\Omega}_M \cdot d\vec{S}_M$ 	$\text{div} \vec{B} = 0$ $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ $\oint_{(C)} \vec{B}_P \cdot d\vec{l}_P = \mu_0 \iint_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S}_M$ 
Tornade  $\begin{cases} \vec{V}(r \leq a) = r\Omega \vec{e}_\theta \\ \vec{V}(r \geq a) = \frac{a^2\Omega}{r} \vec{e}_\theta \end{cases}$	Cylindre infini parcouru par un courant  $\begin{cases} \vec{B}(r \leq a) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(r \geq a) = \frac{\mu_0 j a^2}{2r} \vec{e}_\theta \end{cases}$
Vortex  $\vec{V}(r) = \frac{C}{2\pi r} \vec{e}_\theta$	Fil infini parcouru par un courant  $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$
Rond de fumée autour d'un volcan 	Champ créé par une spire circulaire 



Rond de fumée observé au dessus de l'Etna en 2000

Généralisation

SI LES DEUX SYSTEMES : L'UN MAGNETOSTATIQUE, L'AUTRE CORRESPONDANT A UN ECOULEMENT ROTATIONNEL INCOMPRESSIBLE, PRESENTENT :

- LES MEMES SYMETRIES,
- LES MEMES CONDITIONS LIMITES,
- LES MEMES DISTRIBUTIONS DE SOURCES ($\vec{j}$; $\vec{\mathcal{D}}$)

ALORS LES SOLUTIONS SONT FORMELLEMENT IDENTIQUES.

III. EXEMPLE D'ECOULEMENT POTENTIEL : ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL INCOMPRESSIBLE.

1. ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE POTENTIEL.

CARACTERISTIQUES.

- Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel: $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \varphi / \vec{V} = \overrightarrow{grad} \varphi$
- L'écoulement étant incompressible, on a de plus : $div(\vec{V}) = 0$

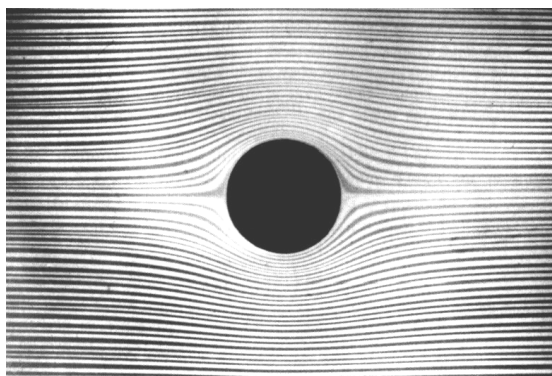
⇒ UN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE ET POTENTIEL VERIFIE : $\Delta \varphi = 0$ OU $\vec{V} = \overrightarrow{grad} \varphi$

- Sachant que $\vec{V} = \overrightarrow{grad} \varphi \Leftrightarrow \varphi = \vec{V} \cdot \vec{dr}$, on en déduit que le champ des vitesses est perpendiculaire aux équipotentielles.

EXEMPLES.

Les écoulements potentiels sont en pratiques des écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds (voir MF4) :

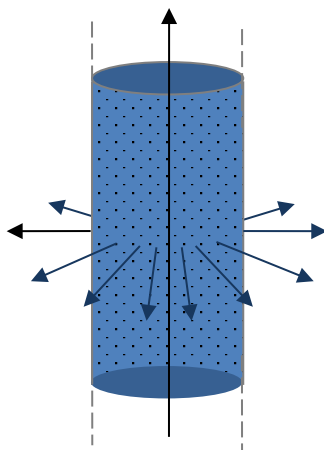
- Ecoulement plan.
- Ecoulement à l'extérieur d'une tornade.
- Ecoulement d'un fluide autour d'un obstacle.



2. ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL.

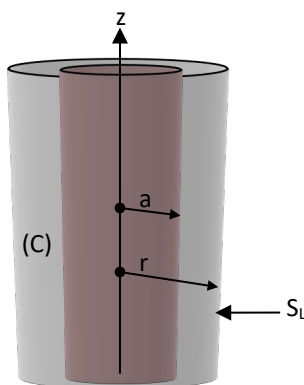
PRESENTATION DU DISPOSITIF.

- On étudie un tuyau cylindrique de rayon a percé d'une multitude de trous, répartis de manière uniforme, et qui émet, par ces trous, un fluide homogène incompressible avec un débit volumique par unité de longueur D_{vl} constant.



CHAMP DES VITESSES ET POTENTIEL.

- L'écoulement étant permanent, le champ des vitesses ne dépend que de la position : $\vec{V}(\vec{r})$
- En coordonnées cylindriques, les invariances et symétries imposent : $\vec{V}(r, \theta, z) = V(r)\vec{e}_r$
 $\Rightarrow$ Le débit volumique à travers un cylindre de rayon $r \geq a$ et d'axe (Oz) est donc :



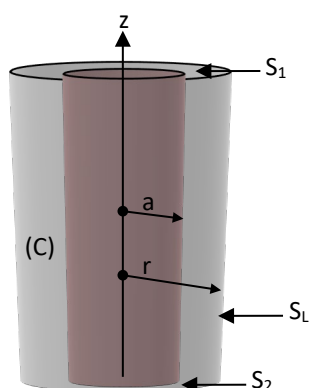
$$\underbrace{\iint_{S_L} \vec{V} \cdot d\vec{S}_L}_{2\pi r h V(r)} = D_v = D_{vl} \times h$$

$\Rightarrow$ On en déduit l'expression de la vitesse du fluide à l'extérieur du tuyau : $\vec{V} = \frac{D_{vl}}{2\pi r} \vec{e}_r$

- On en déduit l'expression du potentiel : $d\varphi = \vec{V} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \varphi = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln(r) + Cste$

PARADOXE.

- On vérifie aisément que l'écoulement est potentiel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \overrightarrow{\text{rot}}(V(r)\vec{e}_r) = V(r) \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{e}_r)}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(V(r)) \wedge \vec{e}_r}_{\vec{0}} = \vec{0}$
- Le fluide étant incompressible, la divergence du champ des vitesses est nulle et donc le flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée devrait être nul. Mais si on exprime ce flux dans le cas d'une surface fermée correspondant au cylindre de rayon $r \geq a$ et d'axe (Oz), on n'obtient pas zéro :



$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S}_1}_0 + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S}_2}_0 + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{v} \cdot d\vec{S}_L}_{2\pi h V(r)} = 2\pi h V(r) \neq 0$$

⇒ On arrive ainsi à un paradoxe :
$$\begin{cases} \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2\pi h V(r) \neq 0 \\ \text{div}(\vec{v}) = 0 \end{cases}$$

⇒ Ce paradoxe vient du fait que la vitesse n'est pas définie pour $r \leq a$

3. ANALOGIE ELECTROSTATIQUE – ECOULEMENT POTENTIEL.

MF	ES
Ecoulement potentiel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$ $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$	Electrostatique : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$
Ecoulement incompressible : $\text{div}(\vec{V}) = 0$ $\Delta\varphi = 0$	Zone sans charge : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ $\Delta V = 0$
Ecoulement bidimensionnel ($a \rightarrow 0$) : Débit volumique par unité de longueur : D_{vl} Champ des vitesses : $\vec{V} = \frac{D_{vl}}{2\pi r} \vec{e}_r$ Potentiel des vitesses : $\varphi = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln(r) + Cste$	Fil rectiligne infini : Densité linéique de charge : λ Champ électrostatique : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ Potentiel électrostatique : $V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + Cste$