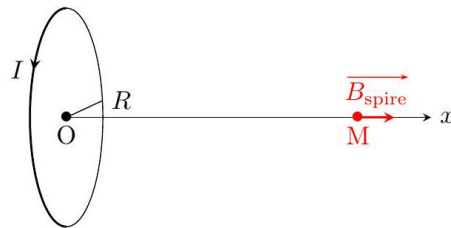


L'effet dynamo, origine du champ magnétique?

Concours commun Centrale Supélec 2016 - filière PC - Physique 1

I Une mesure du champ géomagnétique

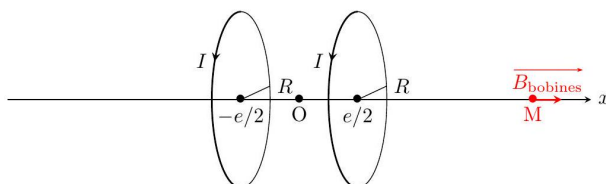
I.A -



- ✘ **Symétries.** M est sur l'axe : tout plan contenant OM est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Ce sont donc des plans de symétrie pour le champ \vec{B}_{spire} . En M appartenant à tous ces plans, le champ est donc selon \vec{u}_x .
- ✘ Lien entre le sens de I et le sens de \vec{B} : **justifier obligatoirement.** Au choix : règle du tire bouchon (« dite de Maxwell »), règle de la main droite, bonhomme d'Ampère, face nord du contour fermé orienté, d'après l'équation de Maxwell Ampère...), le champ \vec{B} est orienté positivement par l'orientation d'un courant positif. D'après le texte, I est orienté positivement selon \vec{u}_x , donc \vec{B} est aussi dans le sens de \vec{u}_x en M . Ainsi en M , comme $B(x) > 0$ lorsque $I > 0$:

$$\vec{B}_{\text{spire}}(M) = B_{\text{spire}}(x)\vec{u}_x$$

I.B -



- ✘ Par changement de variable, le champ créé par la bobine 1 est sur l'axe en x et est de la forme (N spires dans le même plan centré en $-e/2$) :

$$\vec{B}_1 = NB_{\text{spire}}(x + e/2)\vec{u}_x$$

- ✘ De même :

$$\vec{B}_2 = NB_{\text{spire}}(x - e/2)\vec{u}_x$$

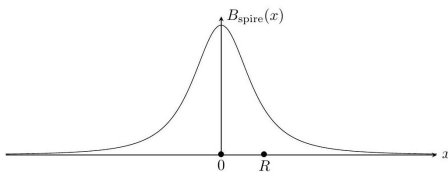
- ✘ Par linéarité (superposition, additivité...), le champ total s'écrit alors :

$$\vec{B}_{\text{bobines}}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{x - e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x + e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x$$

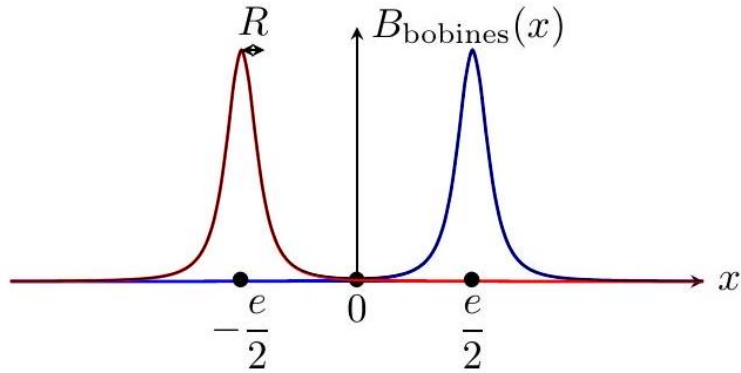
I.C

I.C.1)

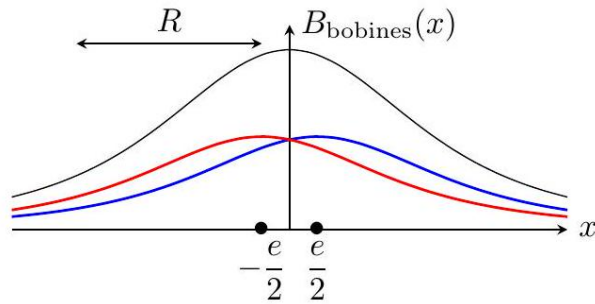
- ✘ Pour une spire, la fonction est symétrique, centrée en zéro, maximale en $x = 0$ et tend vers zéro en $x = \pm\infty$ et la largeur de la courbe est de l'ordre de R :



- ✘ On distingue ainsi deux cas, suivant si les fonctions peuvent se superposer ou pas, ce qui correspond aux cas $e \ll e_0$ (cas d'une superposition complète, c'est comme si on avait une seule bobine en $x = 0$) ou $e \gg e_0$ (pas de superposition - séparation totale des deux champs). On note que forcément alors $e_0 \sim R$, c'est la seule échelle de longueur caractéristique du problème.



(Cas $e \gg R$)

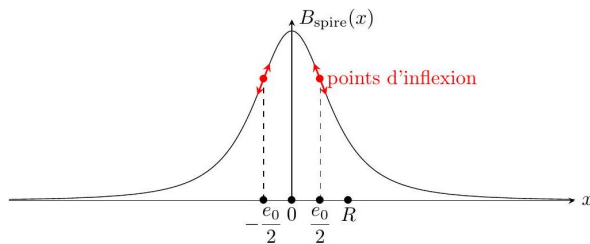


(Cas $e \ll R$)

- ✘ L'intérêt pratique du cas $e \sim e_0$ est d'avoir un cas intermédiaire utile : les deux champs se superposent (ce qui n'est pas le cas si $e \gg R$), et il y a de la place entre les deux bobines (ce qui ne serait pas le cas si $e \ll R$) pour pouvoir y mettre des systèmes sensibles au champ magnétique.

I.C.2)

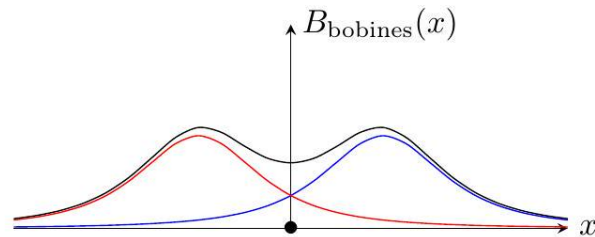
- ✘ Pour une courbe $B_{\text{spire}}(x)$, il existe deux points d'inflexion répartis symétriquement autour de $x = 0$,



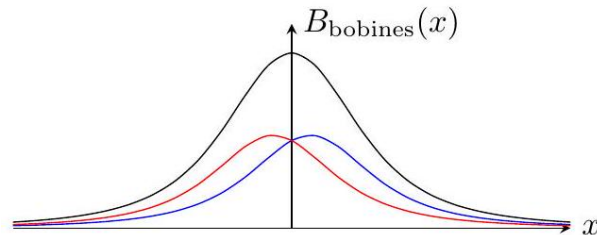
Le calcul mène aux positions $x = \pm \frac{R}{2}$ des points d'inflexion.

- ✗ La courbe B_{bobines} est paire $\forall e$, donc toutes ses dérivées impaires en $x = 0$ sont nulles (les dérivées de chaque composante $B_{\text{spire}}(x \pm \frac{e}{2})$ sont opposées en $x = 0$ et s'annulent)
- ✗ Pour justifier l'existence d'un point d'inflexion sans le calculer, il y a au moins deux méthodes :
 - ☛ Pour une certaine valeur $e = e_0$, les points d'inflexion des composantes B_{spire} , symétriques par rapport à $x = 0$, dans B_{bobines} , se superposent en $x = 0$ et donc la dérivée seconde de la somme s'annule aussi. Par identification, les positions des points d'inflexion pour B_{spire} sont alors en $x = \pm \frac{e_0}{2}$.
 - ☛ Entre les deux cas limites de l'existence d'un minimum en $x = 0$ pour $B_{\text{bobines}}(x)$ (cas $e > e_0$ alors $B''_{\text{bobines}}(0) > 0$) et d'un maximum ($e < e_0$, $B''_{\text{bobines}}(0) < 0$), on a forcément un cas, pour un certain e que l'on identifie à e_0 , de dérivée seconde nulle en $x = 0$.
- ✗ Graphes :

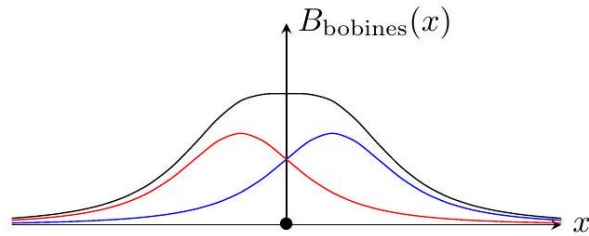
- ☛ Cas $e > e_0$ minimum en $x = 0$:



- ☛ Cas $e < e_0$ maximum en $x = 0$:



- ☛ Cas $e = e_0 (= R)$ inflexion en $x = 0$:



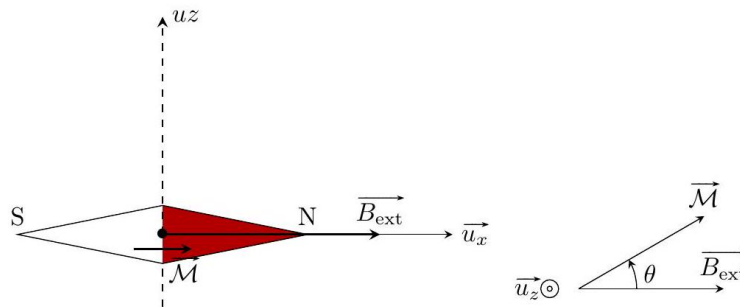
- ✘ Ainsi le développement de Taylor de la courbe en $x = 0$ est nécessairement, en notant $B_0 = B_{\text{bobines}}(0)$, et comme les ordres 1 à 3 sont nuls :

$$B_{\text{bobines}}(x = 0) = B_0 + \mathcal{O}(x^4)$$

c'est-à-dire que la courbe est constante à l'ordre 3.

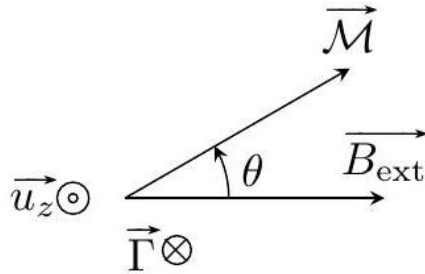
I.D -

- ✘ Schéma obligatoire pour expliquer l'angle θ .



- ✘ Le champ des bobines \vec{B}_{ext} est selon l'horizontale \vec{u}_x et l'axe de rotation de l'aiguille est selon la verticale que l'on note \vec{u}_z . Le moment magnétique \vec{M} de l'aiguille est orienté du pôle sud vers le pôle nord de cet aimant.
- ✘ Qualitativement, un tel moment magnétique s'oriente dans l'axe du champ extérieur magnétique auquel il est soumis. Vu les contraintes de mouvement de l'aiguille, sa position d'équilibre finale est donc l'aiguille orientée vers le nord, ce qui est tout à fait logique pour une boussole...

- ✘ En effet, cette position est une position d'équilibre : le couple du champ $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$ est nul si $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{B}_{ext} sont alignés : les positions d'équilibre correspondent donc à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.



- ✘ Le cas $\theta = 0$ correspond à un équilibre stable et le cas $\theta = \pi$ à un équilibre instable. On peut le prouver en utilisant l'énergie potentielle du dipôle placé dans un champ magnétique extérieur.

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$$

E_p est maximale pour $\theta = \pi$ (équilibre instable) et est minimale pour $\theta = 0$ (équilibre stable).

I.E -

- ✘ On applique le théorème scalaire du moment cinétique (TMCS) projeté selon l'axe $\Delta = (0, \vec{u}_z)$ de rotation de l'aiguille au système composé de l'aiguille de moment d'inertie J , dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire (les forces d'inertie n'ont pas d'influence utile).
- ✘ On note θ l'angle du moment orienté selon \vec{u}_z par rapport à la position d'équilibre.
- ✘ Les actions subies par ce système sont celles de l'axe, le poids, et l'action du champ magnétique.
- ✘ Le couple de l'axe est nul (sans frottement, l'aiguille peut tourner librement), le moment du poids est nul, car le poids est aligné avec l'axe.
- ✘ Il reste le couple exercé par le champ sur le moment, en supposant que le champ est uniforme sur l'aiguille, ce qui est probablement le cas dans

la configuration Helmholtz si l'aiguille est plus petite que les bobines (le champ terrestre, lui est homogène...) :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}} \sin(\theta)\vec{u}_z$$

(cf schéma ci dessus).

- ✘ Le moment cinétique de l'aiguille projeté selon \vec{u}_z est par définition de J et de l'angle θ :

$$\sigma_{\Delta} = J \frac{d\theta}{dt}$$

- ✘ Le TMC s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z$$

soit :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}} \sin \theta$$

- ✘ Par hypothèse les oscillations sont petites donc : $\theta \ll 1$ donc $\sin \theta \approx \theta$
L'équation devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mathcal{M}B_{\text{ext}}}{J} \theta = 0$$

- ✘ C'est un oscillateur harmonique, les solutions sont oscillantes de pulsation ω_1 telle que :

$$\omega_1^2 = \frac{\mathcal{M}B_{\text{ext}}}{J}$$

- ✘ La période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ est alors :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B_{\text{ext}}}}$$

I.F -

- ✘ L'inversion du sens du courant change uniquement la valeur du champ magnétique extérieur appliqué à la boussole. Les calculs précédents sont identiques.

- ✘ Dans l'expérience 1, le champ vaut :

$$B_{\text{ext}} = B_H + B_0$$

- ✘ Dans la deuxième expérience, il vaut :

$$B'_{\text{ext}} = B_H - B_0$$

, où :

$$B_0 = B_{\text{bobines}}(x = 0)$$

- ✘ Ainsi, on a le couple d'équations, en supposant $B_H > B_0$:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_H + B_0)}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_H - B_0)}}$$

On en déduit donc :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H - B_0}{B_H + B_0}} \Rightarrow B_H = B_0 \frac{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

- ✘ L'intérêt de cette expérience est d'une part d'avoir une mesure du champ B_H en le comparant à un champ B_0 créé par l'expérimentateur et en ne mesurant que des temps : le résultat ne dépend pas de J et \mathcal{M} plus difficiles à mesurer. D'autre part, la mesure du temps est assez précise, le contrôle de B_0 aussi dans la configuration dite de Helmholtz $e = R$ (où il est constant, où il y a de la place pour mesurer, et dont on connaît l'expression). De plus, dans cette expérience, l'alignement initial du dispositif avec le nord est assez facile à réaliser en coupant le courant dans les bobines ou en vérifiant que la position d'équilibre est bien dans l'axe des bobines.
- ✘ Ce résultat n'est valide que si $B_H > B_0$, ce qui est finalement peu probable expérimentalement, le champ terrestre étant de l'ordre de 5×10^{-5} T en France, alors qu'avec des bobines, on peut atteindre aisément 10^{-3} T. Dans le cas inverse $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_0 - B_H}{B_H + B_0}}$ donc $B_H = B_0 \frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$.

Pour connaître le cas dans lequel on est, il suffit d'observer la position d'équilibre stable dans les deux cas. Si elle est la même, cela signifie que $B_H + B_0$ et $-B_H + B_0$ sont de même signe et donc qu'on est dans le premier cas étudié, sinon c'est l'inverse.

- ✘ Enfin, on peut noter qu'avec cette méthode, on doit déduire $B_0 = \frac{\mu_0 NI}{R} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$ du calcul, et donc de l'évaluation expérimentale de N, I et R (en supposant que la configuration Helmholtz est bien réalisée expérimentalement...), et non le mesurer. En effet sa mesure seule n'est possible qu'en tournant les bobines perpendiculairement au champ terrestre avec une sonde directionnelle (teslamètre à effet Hall par exemple) sinon on mesure $B_{\text{ext}} = B_0 + B_H$ en même temps. Si l'on souhaite mesurer le champ sans toucher à la direction des bobines ni en le déduisant du calcul, on doit plutôt mesurer B_{ext} et non B_H (soustraire B_H à B_{ext} pour en déduire B_0 n'est pas envisageable, il est probable que B_H ne soit pas mesurable tout seul - bobines éteintes - car trop faible par rapport à B_0). On remarque qu'on a $B'_{\text{ext}} = 2B_H - B_{\text{ext}}$ et on trouve alors $B_H = \frac{B_{\text{ext}}}{2} \left(1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right)$.

II Nécessité dun mécanisme d'entretien du champ géomagnétique : l'effet dynamo

II.A - Limites des explications historiques

II.A.1)

- ✘ On lit dans l'annexe que la température du noyau solide excède 6000°C et celle du noyau externe 4000°C , températures largement supérieures aux températures de Curie des métaux dont est composé le noyau (annexe), c'est-à-dire températures au-delà desquelles les milieux considérés ne sont plus magnétiques (annexe). Donc le noyau de la terre ne peut pas être magnétique.
- ✘ De plus, il existe des inversion de polarité du champ magnétique terrestre. Or il est peu probable que tout le noyau solide se tourne, telle une aiguille, pour inverser avec lui le sens du champ terrestre. De telles inversions complètes et brutales semblent très hypothétiques pour le

noyau dans son ensemble, vu son inertie (il faudrait évaluer l'énergie nécessaire pour le faire et donc la puissance sur le temps d'inversion, et la comparer à quelque chose...). Donc le noyau de la terre ne peut pas être magnétique.

- ✘ Enfin, si le noyau externe avait localement une aimantation rémanente, l'aimantation globale ne serait probablement pas constante vu les mouvements de convection qui y existent. On ne s'attend pas à ce qu'un matériau liquide ferromagnétique sujet à de la convection donne un champ orienté toujours dans le même sens, mais c'est contestable : par auto-organisation les milieux ferromagnétiques peuvent avoir une direction d'aimantation constante tout en se déplaçant...Quoi qu'il en soit si on avait à chercher un aimant permanent, il ne pourrait s'agir raisonnablement que du noyau solide qui par les arguments précédents n'est de toute façon probablement pas aimanté.

Il est donc finalement hautement improbable que le champ magnétique terrestre ait pour origine un super aimant permanent au centre de la Terre.

Notes :

- ✘ Les preuves expérimentales de la fluidité du noyau, de sa température, des inversions de polarité et l'existence d'une température de Curie ont toutes été établies au début du XX^e siècle (ce qui aurait pu être indiqué).
- ✘ un aimant permanent est d'après l'annexe 1 un matériau magnétique «dur» (à ne pas confondre a priori avec solide, même si la plupart sont solides), c'est-à-dire dont le champ rémanent et l'excitation coercitive sont grands. Aucun intérêt pour répondre à la question, et référence au programme de PSI - hors programme en PC (cela aurait donc pu aussi être précisé).

II.A.2-a)

- ✘ L'électron atomique (dans le cadre du programme, on considère l'électron dans un édifice atomique sinon toute particule élémentaire possédant un spin propre non nul, en particulier les fermions : électrons, neutrinos, protons, neutrons...) possède un moment cinétique $\vec{\sigma}$ et un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ non nuls.

- ✘ Le rapport entre ces deux grandeurs définit le rapport gyromagnétique γ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{\sigma}$$

- ✘ Dans un modèle classique où on imagine l'électron de masse m en interaction avec un noyau de charge positive, donc pouvant avoir une orbite circulaire car soumise à la seule force électrostatique de la part du noyau, on peut déterminer sans difficultés γ :

- La trajectoire est un cercle de rayon r , de vitesse angulaire ω et d'axe (Oz) .
- Le moment cinétique de l'électron est alors :

$$\vec{L} = mr^2\omega\vec{e}_z$$

- Le moment magnétique vaut :

$$\vec{m} = I\vec{S} = \frac{-e}{T}\pi r^2\vec{e}_z = \frac{-e\omega}{2\pi}r^2\vec{e}_z$$

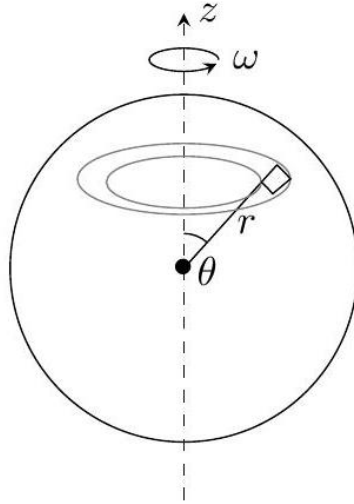
- On obtient donc :

$$\gamma = -\frac{e}{2m}$$

- ✘ Dans un modèle quantique, le moment cinétique (spin) est quantifié, il vaut un multiple de la constante de Planck réduite \hbar , et donc le moment magnétique aussi, qui est alors un multiple du magnéton de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{m}$.

II.A.2-b)

- ✘ La distribution de charge des Z électrons répartis uniformément dans une sphère de rayon a tourne à la pulsation ω autour d'un axe, que l'on note \vec{u}_z passant par le noyau. Cela crée un courant tournant, responsable alors d'un moment magnétique. Le noyau de charge $+Ze$ est exclu du moment magnétique car il est supposé ponctuel et sur l'axe de rotation.
- ✘ Par linéarité découpons cette distribution de charges tournantes en spires élémentaires.



- ✘ Si on suppose que ces électrons sont uniformément répartis dans une boule de rayon a autour du noyau, il y a donc une densité de charge uniforme :

$$\rho = -\frac{3Ze}{4\pi a^3}$$

dans la sphère.

- ✘ On découpe en profitant des symétries : on choisit une spire élémentaire constituée par le volume de charges compris entre r et $r + dr$ et entre les angles θ et $\theta + d\theta$ en coordonnées sphériques par rapport à l'axe de rotation. Son volume élémentaire est :

$$d\tau = 2\pi r \, dr \sin \theta d\theta$$

, sa charge est :

$$dq = \rho d\tau$$

et sa surface :

$$S(r, \theta) = \pi(r \sin \theta)^2$$

- ✘ Chaque spire tourne à la pulsation ω en un temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Elle est donc le lieu d'un courant :

$$dI = \frac{dq}{T}$$

soit :

$$dI(r, \theta) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{-3Ze}{4\pi a^3} 2\pi r \sin \theta dr \, d\theta$$

- ✘ Elle est donc à l'origine d'un moment magnétique :

$$d\vec{\mathcal{M}} = S(r, \theta)dI(r, \theta)\vec{u}_z = \pi\rho\omega r^4 \sin^3 \theta dr d\theta\vec{u}_z$$

- ✘ Par superposition, le moment magnétique total de la sphère tournante est donc :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \int d\vec{\mathcal{M}} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a S(r, \theta)dI(r, \theta)\vec{u}_z \\ &= \pi\rho\omega \int_{r=0}^a r^4 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta\vec{u}_z \\ &= \pi \cdot \frac{-3Ze}{4\pi a^3} \cdot \omega \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3}\vec{u}_z \\ &= -\frac{Zea^2\omega}{5}\vec{u}_z\end{aligned}$$

II.A.2-c)

- ✘ Le modèle d'une charge uniformément répartie à l'intérieur de la Terre ne semble pas pertinent, les milieux internes à la Terre ne sont pas chargés : $\rho = 0$
- ✘ Mais le «modèle» présente en fait une relation entre \mathcal{M} et $\vec{\sigma}$ et son origine physique. Il serait alors encore valable si les charges n'étaient pas uniformément réparties mais par couches homogènes de charges volumiques éventuellement différentes : on aurait quand même un moment magnétique ! On pourrait alors invoquer des charges surfaciques homogènes dans l'atmosphère, de signes différents à différentes altitudes qui permettraient un moment magnétique non nul ? Bref, ce n'est pas l'hypothèse d'uniformité qui est gênante dans ce modèle.
- ✘ Dans l'annexe 1, on constate que le moment magnétique de la Terre et l'axe de rotation ne sont pas alignés, ce qui est contradictoire avec le modèle proposé (où $\vec{\mathcal{M}} \propto \vec{\sigma}$)
- ✘ Quoi qu'il en soit ce modèle ne permettrait pas d'expliquer les inversions de polarité du champ magnétique qu'a connues la Terre (annexe 1) car la rotation de la Terre est constante (léger ralentissement aux échelles géologiques) donc son moment cinétique est (quasi) constant alors que son moment magnétique ne l'est pas du tout à ces échelles temporelles.

II.B - L'effet dynamo

II.B.1-a)

- ✘ La notion de particule de fluide n'a ici absolument aucun intérêt, elle permet juste d'introduire le référentiel en mouvement. Ce qui compte c'est que la force s'applique à toute charge quelconque dans tout référentiel en mouvement, et que sa valeur est forcément la même par invariance...
- ✘ Par invariance de la force et de la charge par changement de référentiel, on a alors la même valeur de la force de Lorentz pour toute charge q de vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} , qu'on l'exprime dans les deux référentiels :

$$q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

- ✘ On note \vec{v} la vitesse de la charge dans le référentiel \mathcal{R} . Sa vitesse \vec{v}' dans le référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(P, t)$ noté \vec{v}_P (vitesse d'entraînement) dans le référentiel \mathcal{R} est telle que :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_P$$

- ✘ On obtient :

$$q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}_P \wedge \vec{B}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

Ceci étant vrai quelque soit la vitesse \vec{v} , on obtient :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_P \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{B}'$$

II.B. 1 – b)

- ✘ Par définition d'un courant volumique de charges dans un milieu où des porteurs « i » en densité volumique de charge ρ_i se déplacent à la vitesse \vec{v}_i dans le référentiel \mathcal{R}

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$$

- ✘ Dans le référentiel \mathcal{R}' , la densité volumique de charge est identique (charge invariante, et volume invariant en mécanique classique, cela aurait pu être rappelé) donc le courant volumique associé est

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}'_i = \sum_i \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) = \sum_i \rho_i \vec{v}_i - \left(\sum_i \rho_i \right) \vec{v}_P$$

- ✘ Or par hypothèse $\sum_i \rho_i = 0$ car le milieu est localement neutre («le fluide n'est pas chargé »...). Donc

$$\vec{j} = \vec{j}'$$

II.B.1-c)

On en déduit immédiatement la relation attendue d'après la loi d'Ohm locale dans le référentiel \mathcal{R}' et les résultats précédents :

$$\vec{j} = \vec{j}' = \sigma \vec{E}' = \sigma (\vec{E} + \vec{v}_P \wedge \vec{B})$$

II.B.2)

II.B. 2 – a)

- ✘ Le courant créé par le champ électromoteur dû au champ \vec{B}_0 est $\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_{M0}$ lui même source d'un champ magnétique d'après Maxwell Ampère.
- ✘ Dans le cadre de l'ARQS (induction), on peut négliger les courants de déplacement.
- ✘ D'après la loi linéaire de Maxwell Ampère, on cherche l'effet d'un courant volumique particulier : il est alors responsable d'un champ magnétique tel que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

c'est-à-dire ici :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1 = \mu_0 \sigma \vec{E}_{M0}$$

II.B. 2 – b)

On a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 \sigma \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

soit en ordre de grandeur

$$\frac{B_1}{L} \sim \mu_0 \sigma U B_0$$

Autrement dit, le champ B_1 est bien proportionnel à B_0 comme on pouvait s'y attendre par linéarité des équations :

$$B_1 \sim \mu_0 \sigma U L B_0$$

II.B.2-c)

Le coefficient de proportionnalité obtenu est

$$r_m = \mu_0 \sigma U L = \frac{UL}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$$

- ✗ Ce coefficient r_m est bien un nombre adimensionné qui caractérise dans le contexte présenté ici une « efficacité » du processus d'induction
- ✗ On constate que $r_m \propto \sigma$, ce qui est en effet caractéristique des phénomènes d'induction : meilleur conducteur est le milieu, plus grands sont les courants volumiques d'induction (de Foucault)
- ✗ cf partie III pour une caractérisation plus précise de ce nombre dit de « Reynolds magnétique »

II.B.3 -a)

Le processus est itératif :

$$\vec{B}_2 = \gamma r_m \vec{B}_1 = (\gamma r_m)^2 \vec{B}_0$$

II.B.3-b)

Par linéarité le champ total résulte de la superposition de tous ces champs, dont \vec{B}_0

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{B}_i$$

On constate que cette somme est celle d'une suite géométrique

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^{\infty} (\gamma r_m)^i \vec{B}_0$$

dont la convergence dépend de la comparaison à un de sa raison γr_m .

II.B.3-c)

Comme pour un laser, on cherche à avoir un champ créé spontanément par des faibles fluctuations, il faut donc avoir un système instable : c'est le cas lorsque la somme est divergente. Le critère d'instabilité dynamo est donc

$$\gamma r_m > 1$$

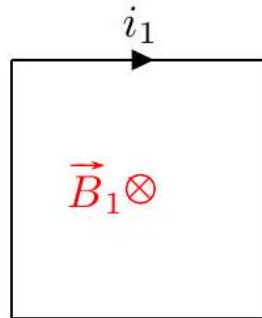
Ainsi un champ \vec{B}_0 quasi nul, provenant de fluctuations, éventuellement locales, est à l'origine d'un champ \vec{B} macroscopique. Il faut bien pour cela que la somme soit très grande devant un.

On note que le champ final ne sera pas infini, ce qui serait énergiquement impossible, il est forcément tempéré par d'autres phénomènes non linéaires non pris en compte dans ce modèle.

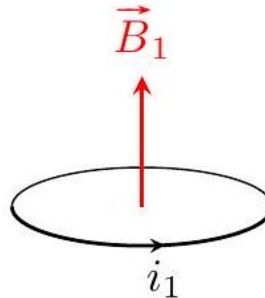
II.C - Étude d'une dynamo à courant et mouvement contraints : la dynamo de Bullard

II.C.1)

- ✗ Si on cherche par les mêmes arguments qu'en I.A.1) des plans de symétrie permettant de trouver les directions des champs créés par induction c'est-à-dire créés par le courant i_1
- ✗ Pour la géométrie A, le plan de la feuille est un plan de symétrie de la distribution de i_1 , donc \vec{B}_1 est perpendiculaire à la feuille dans le plan de la spire.
- ✗ Il est en particulier perpendiculaire à \vec{B}_0 dans le plan de la spire, ce qui est particulièrement inefficace si l'on souhaite augmenter le champ \vec{B}_0 par effet dynamo. La direction en tous points de l'espace est plus compliquée. Elle est notamment dans le même sens que \vec{B}_0 en certains points du plan du disque : le champ enrôle les courants (notamment autour des parties horizontales du fil)



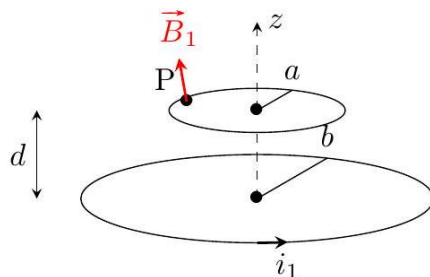
- ✘ Pour la géométrie B, il n'existe aucun plan de symétrie des courants $i_1 \dots$
- ✘ Il en apparaît si on néglige l'effet sur le champ de la branche verticale et qu'on ne s'intéresse qu'aux effets des courants circulaires (hypothèse sous jacente dans l'annexe 2) : dans ce cas tous les plans contenant l'axe de rotation du disque sont plans d'antisymétrie des courants, donc de symétrie de \vec{B}_1 , donc le champ magnétique est vertical sur l'axe et ne possède aucune composante orthoradiale partout.



- ✘ On note que le cas B diffère du cas A par l'ajout de la spire, donc le champ \vec{B}_1 possède dans ce cas une composante supplémentaire selon le même axe que \vec{B}_0 .
- ✘ C'est donc la géométrie **B** qui est la plus adaptée à un effet dynamo permettant de créer un champ magnétique spontané, où un champ magnétique induit un champ magnétique qui se superpose dans le même sens au champ qui lui a donné naissance, permettant une situation d'instabilité divergente. Et finalement seule une distribution de courant équivalente à une pouvant donner un champ \vec{B}_0 peut permettre l'effet dynamo, c'est donc B plutôt que A.

La géométrie B présente moins de symétries que A, ce qui correspond au critère nécessaire donné dans l'annexe, mais ce n'est pas suffisant pour avoir l'effet dynamo : il faut que le champ induit puisse tout de même s'autoentretenir.

II.C.2)



- ✗ L'hypothèse $a \ll b$ suffit pour démontrer le résultat : on peut considérer que tout point P du disque est sur l'axe de la spire. Et comme on est en $z = d$ à distance constante de la spire, les composantes du champ ne dépendent donc que du temps et pas de l'espace.
- ✗ Alors, soit on invoque le résultat de la question IA, soit on refait un argument de symétrie pour montrer que \vec{B}_1 est selon \vec{u}_z lorsque le point d'étude est sur l'axe :

$$\vec{B}_1 \approx B_1(t)\vec{u}_z$$

- ✗ $d \ll a$ donc les deux plans sont coplanaires : le disque est en $z = 0$ de la spire (mais ce n'est pas nécessaire pour démontrer la relation demandée) donc \vec{B}_1 est forcément aussi selon \vec{u}_z par symétrie (plan de la spire). Mais ce n'est pas suffisant pour montrer que B_1 est indépendant de P. Pour cela on a besoin de $a \ll b$ (et ce même si le disque n'est pas centré sur l'axe de la spire).

II.C. 3– a)

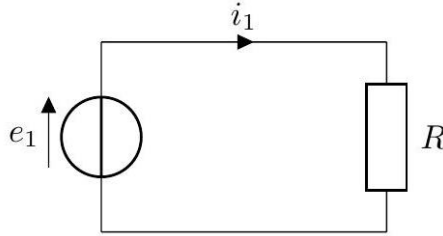
- ✗ La relation entre i_1 et B_1 est donnée par le définition de M , on calcule donc le flux

$$\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = \iint_{\text{disque}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est orienté selon \vec{u}_z d'après l'énoncé. Or d'après la question précédente, \vec{B}_1 est homogène sur le disque, donc $\phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}} = B_1 \pi a^2$.
Donc la première relation demandée est :

$$B_1 \pi a^2 = M i_1$$

- ✘ Le circuit électrique équivalent au circuit parcouru par le courant induit est (le courant induit est généré par la fem e_1)



- ✘ La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent alors :

$$e_1 = R i_1$$

- ✘ Avec l'expression de $e_1 = \Omega B_0 \frac{a^2}{2}$, on obtient ainsi la relation demandée :

$$B_1 = \frac{M \Omega}{2 \pi R} B_0$$

II.C.3-b)

Dans ce cas présent, on identifie $\gamma r_m = \frac{M \Omega}{2 \pi R}$ défini à la question II.B.3. La condition d'effet dynamo obtenu à cette question est $\gamma r_m > 1$ soit

$$\frac{M \Omega}{2 \pi R} > 1$$

Cette condition pour avoir un effet dynamo impose une grande vitesse et/ou une grande mutuelle, et/ou une petite résistance, des critères favorisant chacun en effet un fort phénomène d'induction.

II.C.4)

Ce calcul n'est en fait pas si direct que cela car le champ \vec{B}_0 utilisé dans le calcul du flux du champ total à travers le disque n'est plus uniforme sur le disque, ce qui remet en cause la deuxième relation. Le calcul complet mène tout de même à la même relation... L'intérêt de cette question ainsi posée est très limité. Les relations obtenues précédemment sont encore valables pour le champ/courant/fem totaux. Donc

$$e = \Omega B \frac{a^2}{2}$$

et de même

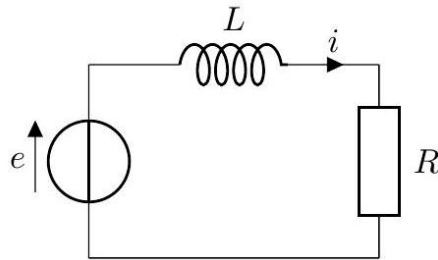
$$B = \frac{Mi}{\pi a^2}$$

et de même

$$e = \frac{\Omega M}{2\pi} i$$

II.C.5)

Le schéma électrique équivalent est cette fois :



- ✗ La loi des mailles et les relations des composants R et L donne $e = Ri + L \frac{di}{dt}$
- ✗ D'où l'équation en remplaçant l'expression de e

$$L \frac{di}{dt} + \left(R - \frac{\Omega M}{2\pi} \right) i = 0$$

- ✗ Cette équation donne une solution de courant instable, divergent, si dans l'équation

$$R - \frac{\Omega M}{2\pi} < 0$$

- ✗ C'est bien une condition exactement équivalente à celle obtenue à la question II.B. 3 : $\frac{M\Omega}{2\pi R} > 1$, obtenue ainsi par deux méthodes différentes : la première par une méthode itérative, ici par une méthode globale.

II.C.6)

Il n'y a pas encore de rétroaction mécanique de l'induction sur le système via une force de Laplace, pour l'instant l'équation mécanique considérée est $\Omega = cste$.

II.C.7)

- ✗ Le disque est soumis uniquement au moteur, de couple Γ_m sur l'axe, et à l'action de la force de Laplace dans le référentiel du laboratoire, comme précédemment, le moment du poids est nul car l'axe est vertical et il n'y a pas de frottements.
- ✗ La force de Laplace sur le disque a pour couple sur l'axe orienté selon \vec{u}_z (le courant i est défini dans le sens radial sur le disque d'après le schéma)

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = \int_0^a \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = -iB \frac{a^2}{2} = -\frac{Mi^2}{2\pi}$$

d'après l'expression de B obtenue à la question précédente

- ✗ Or le disque a pour moment cinétique $J\Omega$ projeté sur \vec{u}_z . L'application du TMCS donne donc l'équation demandée

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - \frac{Mi^2}{2\pi}$$

la deuxième équation a déjà été obtenue précédemment et reste valable.

II.C.8)

En régime stationnaire, on a donc directement :

$$\Gamma_m = \frac{Mi^2}{2\pi}$$

$$R = \frac{\Omega M}{2\pi}$$

soit

$$i = \pm \sqrt{\frac{2\pi\Gamma_m}{M}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi R}{M}$$

II.C.9)

- ✘ On multiplie par Ω l'équation mécanique et par i l'équation électrique pour obtenir des bilans de puissance :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = -Ri^2 + \frac{M\Omega i^2}{2\pi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\Omega^2 \right) = \Gamma_m \Omega - \frac{M\Omega i^2}{2\pi}$$

- ✘ En multipliant par dt et en faisant la somme de ces deux équations, on obtient le bilan énergétique du système global (comme explicitement demandé par l'énoncé) entre t et $t + dt$:

$$d \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} J\Omega^2 \right) = -d\mathcal{E}_J + d\mathcal{E}_m$$

où :

- $\frac{1}{2} Li^2$ est l'énergie électrique stockée sous forme magnétique dans l'inductance équivalente au circuit du courant d'induction, c'est-à-dire dans tout le champ magnétique
 - $\frac{1}{2} J\Omega^2$ est l'énergie cinétique de rotation du disque.
 - $d\mathcal{E}_m = \Gamma_m \Omega dt$ est l'énergie fournie par le moteur au disque entre t et $t + dt$, gagnée par le système
 - $d\mathcal{E}_J = Ri^2 dt$ est l'énergie dissipée par effet Joule entre t et $t + dt$, qui est perdue par le système global (signe négatif)
- ✘ Les termes inductifs se compensent exactement : c'est le couplage électromécanique parfait du phénomène d'induction qui assure cela, la puissance gagnée (respectivement perdue) par le disque sous forme mécanique via la force de Laplace est perdue (resp. gagnée) par le circuit électrique en imposant une fem d'induction (qui vient du champ électromoteur créé par le mouvement des charges).

II.C.10)

En régime stationnaire le bilan énergétique s'écrit (en puissance, insistons...)

$$\Gamma_m \Omega = Ri^2$$

Autrement dit, la puissance fournie par le moteur compense exactement les pertes par effet Joule dans le circuit électrique.

Cela met encore en évidence

- ✗ le couplage électromécanique parfait,
- ✗ le fait qu'en régime stationnaire, il n'y a pas de stockage de la puissance en énergie
- ✗ ce régime stationnaire ne peut exister que s'il y a une source d'énergie externe (le moteur)
- ✗ l'effet dynamo même ne peut exister que s'il y a une source mécanique d'énergie
- ✗ le régime stationnaire ne peut réellement être atteint que si le système est refroidi en permanence et suffisamment...

II.C.11)

- ✗ Le changement de signe possible sur la solution i en régime stationnaire (\pm) pourrait expliquer l'inversion de polarité.
- ✗ On note que ce système (la dynamo de Bullard) est en fait stable, il ne présente pas d'inversion spontanée, le signe est déterminé une fois pour toutes par les conditions initiales.

II.D - L'expérience VKS2 (ENS Lyon, Ulm et CEA Saclay, Cadarache)

II.D.1)

- ✗ On lit dans l'encadré de l'article « On choisit le sodium malgré les problèmes de sécurité qu'il pose, car c'est le meilleur fluide conducteur de l'électricité autour de 100°C – 150°C. »

- ✗ Autrement dit, le sodium est le fluide conducteur à plus grand σ dans les conditions de l'expérience. Cela favorise donc les grands nombres de Reynolds magnétiques (introduit après... ou à ce stade du sujet $\ll r_m \checkmark$ qui favorise l'effet dynamo) permettant l'apparition de l'effet dynamo, et rapproche les conditions de l'expérience des conditions réelles du noyau terrestre.
- ✗ À plus basse température, le sodium serait solide donc inutile pour l'expérience, et il y a peu de métaux liquides à des températures aisément accessibles expérimentalement comme c'est le cas ici (le fer fusionne à 1500°C à pression atmosphérique, il est donc inenvisageable de l'utiliser). On note d'autre part que sa densité est relativement faible (par comparaison à du mercure par exemple, autre métal liquide aux températures usuelles), ce qui améliore le nombre de Reynolds.
- ✗ Cela pose des problèmes de sécurité car le sodium est très réactif avec l'eau liquide (ou l'humidité de l'air) : il réalise avec l'eau une réaction fortement exothermique car le sodium est fortement réducteur ($E^\circ = -2,71\text{ V}$), produisant la forme oxydée, les ions Na^+ , très répandue dans la nature (et donc stable...). C'est en effet un métal alcalin de faible électronégativité, on le conserve à l'état solide immergé dans de l'huile minérale, ou à l'état liquide dans des enceintes étanches comme ce doit être le cas dans l'expérience VKS2 (et comme ce fut le cas pour les réacteurs nucléaires Superphénix).

II.D.2)

Les caractéristiques du champ magnétique terrestre mises en évidence par cette expérience sont

- ✗ création spontanée d'un champ magnétique par turbulence du champ magnétique, l'effet dynamo en serait donc responsable ;
- ✗ un champ entretenu, relativement stable et de direction fixée, malgré la turbulence
- ✗ des inversions de polarité du champ lorsqu'il y a une rotation résiduelle du champ de vitesse, ce qui est le cas de la Terre (rotation propre) ;
- ✗ des inversions chaotiques, aucune fréquence propre caractéristique ne s'en dégage ;
- ✗ les temps caractéristiques de l'établissement de l'inversion sont très petits devant les temps des plages de polarité constante.

Le fait qu'il existe de nombreux comportements qualitativement différents en fonction des valeurs des nombres adimensionnés ne met rien en évidence sur le champ terrestre mais apporte encore des arguments en faveur de l'origine turbulente du champ magnétique.

II.D.3)

- ✘ Le nombre de Reynolds est défini par (rappelé dans l'annexe) $R_e = \frac{LU}{\nu}$, où ν est la viscosité cinématique. Or $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ avec η la viscosité dynamique et ρ la masse volumique, de sorte que $R_e = \frac{\rho LU}{\eta}$ (résultat de cours).
- ✘ Avec les données de l'énoncé $\nu = \rho/\eta = 7 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour le sodium.
- ✘ On lit $L \sim 600 \text{ mm}$
- ✘ $U \sim \Omega L$ avec $\Omega \approx 1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \approx 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui donne une vitesse typique de l'ordre de $60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- ✘ Ainsi, en ne conservant qu'au maximum un chiffre significatif (CS)

$$R_e = \frac{\Omega L^2 \rho}{\eta} \sim 6 \times 10^7$$

- ✘ Dans le texte sont mentionnées les valeurs de 10^6 à 10^7 , ce qui est compatible, on est bien en régime fortement turbulent. La valeur de la vitesse caractéristique $U = \Omega L$ a été probablement surévaluée ici en ordre de grandeur, ce qui pourrait expliquer le léger écart.

```
>>> from math import pi
>>> L = 600e-3 #m
>>> Omega = 1000 #tr/min
>>> Omega *= 2*pi/60 #rad/s
>>> eta = 6e-4 #SI
>>> rho = 900 #SI

>>> nu = eta/rho
>>> print("nu_Na = {0:.0e} m^2.s^-1 ({}).format(nu))
nu_Na = 7e-07 m^2.s^-1 (6.6666666666666666e-07)
>>> Re = Omega*L**2/nu
>>> print("Re = {0:.0e} ({}).format(Re))
Re = 6e+07 (56548667.76461628)
```

II.D.4)

C'est bien le même, il est mentionné à la troisième page de l'article, dans l'encadré sur «le nombre de Reynolds magnétique».

III Relations fondamentales de la magnétohydrodynamique

III.A - COURS

- ✘ En ordre de grandeur les champs varient sur l'échelle spatiale L et temporelle T .
- ✘ La vitesse d'une particule de fluide est de l'ordre de L/T (couplage parfait entre écoulement et champ?)
- ✘ Et dans Maxwell-Ampère, si les courants de déplacements sont négligeables par rapport aux autres termes, alors $\vec{\text{rot}}B \approx \mu_0 \vec{j}$ (sinon il n'y a plus d'influence des courants). Dans ce cas $\|\vec{j}\| \ll \|\vec{j}_d\| \Leftrightarrow \|\epsilon_0 \vec{j}_d\| \ll \|\vec{\text{rot}}\vec{B}\|$, soit en ordre de grandeur

$$\frac{B c^2}{E U} \gg 1$$

en utilisant $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

- ✘ Or d'après Maxwell Faraday en ordre de grandeur, les deux termes sont du même ordre donc (sinon il n'y a plus de rétroaction sur l'induction)

$$\frac{E}{B} \sim \frac{L}{T} \sim U$$

Attention, on n'a pas ici $E/B = c$!

- ✘ Donc la condition $\|\vec{j}\| \ll \|\vec{j}_d\|$ est équivalente à

$$\frac{U^2}{c^2} \ll 1$$

ce qui correspond bien à une hypothèse d'écoulement non relativiste.

On pourrait aussi invoquer $j \sim \sigma E$, de sorte que $\|\vec{j}\| \gg \|\vec{j}_d\| \Leftrightarrow T \gg \tau$ où $\tau = \epsilon_0/\sigma$ (utilisé après), ce qui est équivalent à une limite type ARQS, mais qu'il faut relier à la l'hypothèse de l'écoulement non relativiste, et ce n'est pas si évident que cela, car ici on parle d'écoulement et non d'onde. Et on ne peut pas non plus a priori avancer $j \sim \rho U$ car le ρ ici (densité de porteurs de charges) n'est pas le même que celui de Maxwell Gauss (densité totale), ce qui n'avancerait alors à rien (on peut en avoir un nul, et l'autre non).

III.B -

III.B.1)

- ✗ En injectant directement l'expression de \vec{j} en prenant en compte le champ électromoteur et en utilisant Maxwell Gauss

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_e = -\sigma \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

- ✗ Il semble totalement inutile en soi (et en regardant la suite du sujet) de développer plus cette relation avec les formules d'analyse vectorielle données dans le sujet (le sujet aurait dû le préciser).
- ✗ Notons que sous cette forme, le terme de droite apparaît comme une source de création de charge : Le terme $-\sigma \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$ est en effet ici un taux volumique de création de charge.

III.B.2)

- ✗ Au repos $\vec{v} = \vec{0}$ l'équation se ramène au cas classique, dont la solution est :

$$\rho_e(t) = \rho_e(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- ✗ Le temps caractéristique d'évolution est $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ par identification, l'AN donne pour le cuivre (1 à 3 CS acceptables)

$$\tau = 1,48 \times 10^{-19} \text{ s}$$

- ✗ Donc au bout d'un temps très court, le milieu est localement de charge nulle, tant que les champs varient sur des échelles de temps plus longues, à de plus basses fréquences que $f_c = \frac{1}{\tau} \sim 10^{19} \text{ Hz}$, ce qui est une très haute fréquence par rapport aux fréquences habituellement accessibles en TP (ARQS) ou visiblement en jeu dans la magnétohydrodynamique lorsque l'on sort de l'hypothèse du repos (et comme les écoulements sont turbulents, ce n'est pas si sûr que cela aux échelles locales ?)

III.B.3)

- ✗ Si le conducteur est en mouvement et qu'on est en régime stationnaire

$$\rho_e = -\epsilon_0 \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En OG, on obtient $\rho_e \sim \frac{\epsilon_0 U B}{L}$, soit à 0 ou 1 CS :

$$\rho_e \sim 5 \times 10^{-12} \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$$

- ✘ (Il est clair que l'interprétation ρ_e non nul car $\text{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$ non nul dû à l'induction n'est pas suffisante, c'est une paraphrase de l'équation, la question est pourquoi ? L'interprétation semble subtile... Tentative...) La nécessité d'une charge volumique non nulle peut s'expliquer par le fait que dans le référentiel au repos, où il n'y a pas de champ électromoteur, des charges sont en mouvement dans le fluide, elles-même à l'origine des courants de charge et donc du champ magnétique. Or ces charges ont été mises en mouvement uniquement par l'existence d'une force électrique, qui ne peut elle-même qu'avoir été produite que par un champ électrique \vec{E} conséquence d'une distribution de charge locale non nulle : ρ_e .
- ✘ L'OG de charges libres dans un métal est de 10^{30}m^{-3} , donc la densité volumique de charge libres est de l'ordre de $\rho_l \sim 10^{11} \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$, que l'on retrouve par la formule $\rho_l = \frac{N_A \rho_e}{M}$
- ✘ On a donc $\rho_e \ll \rho_l$, les charges mises en jeu par le phénomène magnétohydrodynamique sont une très faible portion des charges présentes dans le sodium, mais elles restent à l'origine de l'effet dynamo !

III.C

- ✘ ($\text{div} \vec{j} = 0$ d'après les questions précédentes car le milieu est localement neutre
- ✘ D'après l'énoncé on se place en régime stationnaire, le potentiel scalaire est donc défini par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ (Maxwell Faraday stationnaire). Alors on retrouve immédiatement l'équation de Poisson par Maxwell Gauss

$$\Delta V = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

III.D

- ✘ On procède comme pour une équation d'onde. D'après Maxwell Ampère en négligeant courant de déplacement et en utilisant la loi d'Ohm locale,

et Maxwell Flux :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{B} = 0$$

✘ En utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}$, alors

$$-\Delta\vec{B} = \mu_0\sigma[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})]$$

✘ D'après Maxwell Faraday alors :

$$-\Delta\vec{B} = \mu_0\sigma \left[-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \right]$$

C'est-à-dire l'équation demandée :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \lambda\Delta\vec{B}$$

avec par identification $\lambda = \frac{1}{\mu_0\sigma}$.

✘ L'identification des deux termes est aisée car quasi donnée par le sujet (une chance sur deux...) il s'agit donc probablement de bien les justifier :

- Le terme laplacien s'identifie à un terme diffusif car il est relié à une dérivée temporelle première du même objet (le champ magnétique), avec λ un «coefficient de diffusion magnétique» en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
- L'autre terme est celui d'origine inductive, car il est lié aux mouvements du fluide conducteur par le champ de vitesses \vec{v}

III.E -

✘ En multipliant par $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ pour avoir une équation homogène à une puissance volumique puis en intégrant sur un volume \mathcal{V} quelconque pour faire apparaître une équation homogène à une puissance

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mu_0} B^2 \, d\tau = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{B} \, d\tau + \frac{\lambda}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \Delta\vec{B} \cdot \vec{B} \, d\tau$$

- Le membre de gauche est la dérivée temporelle de l'énergie magnétique $U_m = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mu_0} B^2 \, d\tau$

- Le premier terme du membre de droite est une puissance reçue P_I d'origine inductive
- (si on part mal sur ce calcul, cela devient vite très moche, son intérêt est limité car les questions d'analyse vectorielle sont à la limite du programme et un bilan d'énergie a déjà été demandé à la partie précédente...) On travaille sur le second terme du membre de droite, où on cherche à faire réapparaître la source \vec{j} et une divergence liée à l'induction

$$\begin{aligned}\Delta \vec{B} \cdot \vec{B} &= -\overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) \cdot \vec{B} = -\mu_0 \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\mu_0 (\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B})) \\ &= -\mu_0 (\mu_0 j^2 + \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B}))\end{aligned}$$

- ✗ Le second terme est une divergence, donc intégré sur le volume donne un flux sur la surface extérieure d'après le théorème d'Ostrogradsky

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \wedge \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

intégrale qui est nulle si on prend le volume assez grand de sorte que les bords du volume voient un champ magnétique nul à l'infini.

- ✗ Le premier des deux termes donne les pertes par effet Joule, une fois multiplié par $\lambda/\mu_0 = 1/(\mu_0^2 \sigma)$ et intégré

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{j^2}{\sigma} d\tau = \mathcal{P}_J$$

Ce terme d'effet Joule intervient dans l'équation globale avec un signe négatif : c'est une perte de l'énergie magnétique dans le milieu conducteur sous forme thermique du fait du couplage inductif. En effet, l'équation énergétique s'écrit au final :

$$\frac{dU_m}{dt} = -\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_I$$

faisant apparaître deux origines au stockage global de l'énergie magnétique : une puissance reçue d'origine inductive et une puissance perdue par effet Joule.

III.F -

- ✘ On a une équation de diffusion si le terme inductif $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$ est négligeable devant le terme diffusif (ce qui arrive si $R_m \ll 1$, cf après...). En particulier s'il est nul, dans le cas par exemple d'un fluide est complètement au repos $\vec{v} = \vec{0}$, ou dans d'autres conditions suffisantes que l'on retrouve en développant ce rotationnel (conditions qui n'ont aucun intérêt ici, l'énoncé aurait dû préciser «la condition nécessaire», les conditions suffisantes ont peu d'intérêt et il y en a beaucoup).
- ✘ Dans ce cas la diffusion pure fait disparaître le champ \vec{B} (pas de champ aux limites à l'infini) sur une échelle de temps τ qui dépend de l'échelle spatiale R telle que

$$\frac{R^2}{\tau} \sim \lambda$$

- ✘ En prenant comme échelle spatiale la taille typique de la coquille fluide du noyau (externe), $R = 2 \times 10^3$ km, on obtient

$$\tau \sim R^2 \mu_0 \sigma \sim 7 \times 10^4 \text{ans}$$

Ce résultat n'a de sens qu'en années pour pouvoir être comparable et ne comporte que zéro ou un CS.

- ✘ C'est un temps long à l'échelle humaine mais court à l'échelle géologique (âge de la Terre : 5 milliards d'années). Cela confirme donc que le champ magnétique terrestre est entretenu par des phénomènes inductifs, un champ fossile éventuel aurait disparu depuis longtemps.

III.G -

- ✘ Dans l'équation d'évolution, on peut comparer les ordres de grandeur de la source inductive du champ magnétique par advection $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})$ et du terme de dissipation diffusive $\lambda \Delta \vec{B}$ pour construire un nombre sans dimension :

$$R_m = \frac{\|\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B})\|}{\|\lambda \Delta \vec{B}\|}$$

✘ En ordres de grandeur :

$$R_m = \frac{UL}{\lambda}$$

✘ Ceci correspond effectivement à la définition du nombre de Reynolds magnétique mentionné dans l'annexe et retrouvé aux questions, sous le nom r_m , II.B.3, II.C. 5 et II.D. 4, et qui s'interprétait alors comme une condition d'instabilité des phénomènes inductifs lorsque $R_m > 1$. On peut donc préciser ici que ce qui tempère l'instabilité est la diffusion du champ.