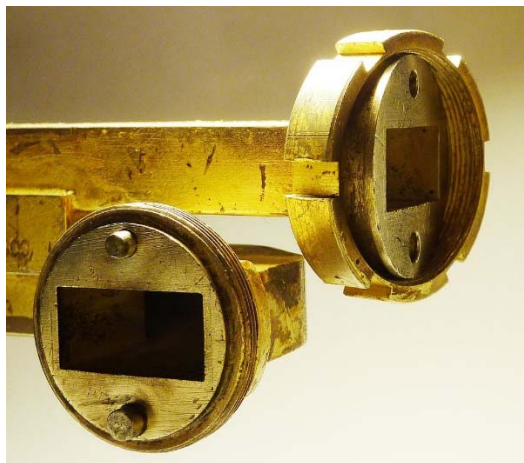


LE GUIDE D'ONDE.

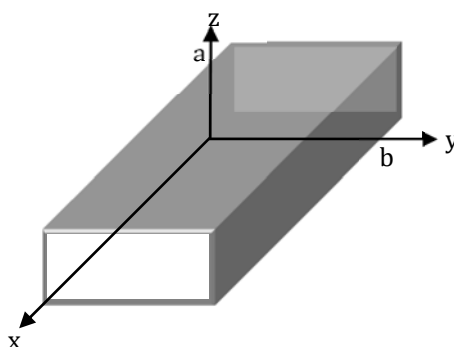
UN EXEMPLE DE SYSTEME DISPERSIF.



Détail d'un guide d'onde hyperfréquences

1. MODELISATION.

- Un guide d'onde est une canalisation cylindrique, ou à section rectangulaire, **soit vide soit remplie d'un diélectrique** où se propagent les ondes électromagnétiques. **Le guide d'onde sert à transporter des ondes électromagnétiques dans le domaine des radiofréquences** en les canalisant.
- En supposant les conducteurs parfaits et en utilisant les conditions de passage, on obtient les relations suivantes au niveau de l'interface conducteur/vide : $\vec{B}_\perp = \vec{0}$ et $\vec{E}_\parallel = \vec{0}$
- On considère un guide d'onde rectangulaire d'axe (Ox) de section de cotés a et b.



- On cherche les solutions sous la forme : $\vec{E}(M, t) = \underbrace{E(y, z)}_E \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$

⇒ Le champ électrique étant perpendiculaire à la direction de propagation, on dit que le mode recherché est transverse électrique (TE)

$$\Rightarrow \text{Le champ } \vec{E} \text{ cherché doit vérifier : } \begin{cases} \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{E}(z=0) = \vec{E}(z=a) = \vec{0} \end{cases}$$

2. DETERMINATION DES CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE.

- Dans l'espace inter-conducteur, les équations de Maxwell vérifiées sont celles correspondant au vide sans charge :

$$\begin{cases} MG & \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ M\Phi & \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ MF & \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA & \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- En utilisant l'expression $\vec{E}(M, t) = E(y, z) \cdot \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$, l'équation de MG devient : $\underbrace{\frac{\partial E}{\partial x}}_0 + \frac{\partial E}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial E}{\partial z}}_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M, t) = E(z) \cdot \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

- En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, on obtient : $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow -k^2 E(z) \cos(\omega t - kz) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \cos(\omega t - kz) = -\frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kz) E(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(z) = 0$$

- Si $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) < 0$ les solutions de cette équation différentielle ne sont pas périodiques \Rightarrow cas exclu.

- Si $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) > 0$ les solutions de cette équation différentielle sont périodiques \Rightarrow **cas étudié.**

$$\Rightarrow \text{Posons : } K^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \text{ alors : } E(z) = A \cos(Kz) + B \sin(Kz)$$

- Les conditions limites donnent : $\begin{cases} E(z=0) = 0 = A \\ E(z=a) = 0 = B \sin(Ka) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ K_n = \frac{n\pi}{a} \text{ n étant un entier} \end{cases}$

\Rightarrow La pulsation ω et k sont donc liés : $k_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)$: relation de dispersion.

$\Rightarrow \vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right)}_{E_n} \cos(\omega t - k_n x) \vec{u}_y$ (mode TE_n)

Attention ! Les solutions réelles trouvées ne sont valables que si k_n est réel (et donc si $\omega > \frac{n\pi}{a} c$)

- Détermination de \vec{B} :

Attention !! L'onde n'étant pas plane, on ne peut pas utiliser la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Notons

qu'utiliser l'équation de MA est trop compliqué (détermination de \vec{B} à partir de son rotationnel).

\Rightarrow On utilise l'équation de MF : $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_n}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{on} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) & 0 \\ \frac{\partial E_n}{\partial x} & 0 & -E_{on} k_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_n(x, z, t) = \begin{vmatrix} E_{on} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \\ 0 \\ E_{on} \frac{k_n}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \end{vmatrix}$$

\Rightarrow Le champ \vec{B}_n n'est pas transverse (composante suivant la direction de propagation).

- Notons qu'étudier les conditions de passage en $z=0$ et $z=a$ pour le champ \vec{B} nous permettraient de déterminer les courants surfaciques.

3. ETUDE DE LA RELATION DE DISPERSION.

Partons de : $k_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)$

Cas où $\omega > \frac{n\pi}{a}c$:

- Nous avons déjà étudié le cas où $\omega > \frac{n\pi}{a}c$: L'onde se propage dans la direction des x croissants et a pour

$$\text{vecteur d'onde } \vec{k} = k_n \vec{e}_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \vec{e}_x.$$

- Ainsi pour que l'onde TE_n se propage, il faut que $\omega \geq \omega_{cn}$ où $\omega_{cn} = \frac{n\pi}{a}c$ est la pulsation de coupure. Notons que pour $\omega < \frac{\pi c}{a}$ aucun mode ne se propage.

- Soit λ_0 la longueur d'onde de l'onde électromagnétique en dehors du guide d'onde : $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega}$ et soit λ_n

la longueur d'onde de l'onde électromagnétique TE_n dans le guide d'onde : $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$

$$\Rightarrow \text{D'après } k_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right), \text{ on a : } \lambda_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0 n}{2a}\right)^2}} > \lambda_0$$

\Rightarrow Les longueurs d'onde dans le guide sont supérieures à celle de l'onde dans le vide.

- Pour $\omega \gg \omega_{cn}$ (et donc $\lambda_0 \ll \lambda_{cn}$), la relation de dispersion donne : $k_n = \left(\frac{\omega}{c}\right)$

\Rightarrow On retrouve la relation de dispersion d'une onde électromagnétique (sans obstacles)

\Rightarrow La longueur d'onde est tellement petite que l'onde ne voit pas les limites imposées par le guide d'onde.

Cas où $\omega < \frac{n\pi}{a}c$:

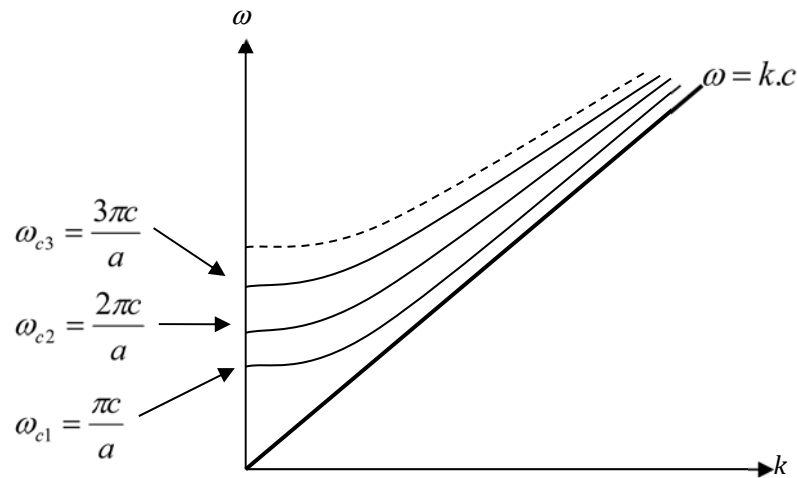
- Si $\omega \leq \frac{n\pi}{a}c$ alors $k_n^2 < 0 \Rightarrow k_n$ est donc imaginaire pur : $k_n = \pm i k''_n$ où $k''_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$

\Rightarrow En reprenant l'étude précédente en notation complexe, on arrive à :

$$\vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) e^{j(\omega t - k_n x)} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} e^{-k''_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) e^{j(\omega t)} \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} e^{-k''_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

⇒ L'onde ne se propage pas : On est en présence d'une onde stationnaire évanescente.



4. VITESSE DE PHASE/VITESSE DE GROUPE.

- Vitesse de phase : $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2}} > c$

- Vitesse de groupe : $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

Or, $k^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) \Rightarrow 2k \cdot dk = 2 \frac{\omega \cdot d\omega}{c^2} \Rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{V_\phi} \Rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2} < c$

- Notons que la relation $V_g \cdot V_\phi = c^2$ n'est valable que pour les relations de dispersion de la forme :

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + Cste : \text{ Cette relation de dispersion est appelée relation de Klein-Gordon.}$$

5. APPROCHE ENERGETIQUE.

- Partons de $\vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \vec{u}_y$ et $\vec{B}_n(x, z, t) = \begin{cases} E_{on} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \\ 0 \\ E_{on} \frac{k_n}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \end{cases}$

a. DENSITE D'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE.

- $u_{em} = \frac{\epsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$

D'où :

$$u_{em} = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - k_n x) + \frac{E_{on}^2}{2\mu_o} \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin^2(\omega t - k_n x) + \frac{E_{on}^2}{2\mu_o} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - k_n x)$$

- D'où la valeur moyenne de u_{em} :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{4} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) + \frac{E_{on}^2}{4\mu_o} \underbrace{\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2}_{\frac{1}{c^2} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2} \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) + \frac{E_{on}^2}{4\mu_o} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right)$$

$$\Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{4} \left(1 + \left(\frac{k \cdot c}{\omega}\right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) - \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \right) \right)$$

- On en déduit l'énergie électromagnétique moyenne dans le guide d'onde (longueur L)

$$\langle U_{em} \rangle = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^b \int_{x=0}^L \langle u_{em} \rangle dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{4} \cdot abL$$

b. VECTEUR DE POYNTING

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} \Rightarrow \vec{\Pi} = \begin{pmatrix} \left(\frac{E_{on}^2 \cdot k}{\mu_o \omega}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - k_n x) \\ 0 \\ \left(-\frac{E_{on}^2 \cdot n \cdot \pi}{\mu_o \cdot a \cdot \omega}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \end{pmatrix}$$

- D'où la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$: $\langle \vec{\Pi} \rangle = \left(\frac{E_{on}^2 \cdot k}{2\mu_o \omega}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \vec{u}_x$

- D'où la puissance moyenne traversant une section droite $S=a \cdot b$:

$$P = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^b \left(\frac{E_{on}^2 \cdot k}{2\mu_o \omega}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dy \cdot dz \Rightarrow P = \frac{E_{on}^2 \cdot k}{4\mu_o \omega} \cdot a \cdot b$$

c. VITESSE DE DEPLACEMENT DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE :

- L'énergie électromagnétique traversant La surface $S=a \cdot b$ pendant dt est :

$$dE = P dt = \frac{E_{on}^2 \cdot k}{4\mu_o \omega} \cdot a \cdot b dt$$

- Cette énergie est égale à l'énergie contenue dans le parallélépipède de dimensions :

$$\begin{cases} 0 < x < V_e dt \\ 0 < y < b \\ 0 < z < a \end{cases}$$

On a donc également : $dE = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^b \langle u_{em} \rangle dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{V_e dt} = \frac{\epsilon_o E_{on}^2}{4} a \cdot b \cdot V_e dt$

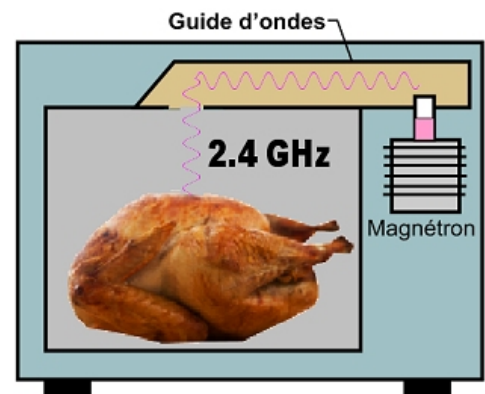
⇒ En égalisant les deux termes : $dE = \frac{E_{on}^2 \cdot k}{4\mu_o \omega} \cdot a \cdot b dt = \frac{\epsilon_o E_{on}^2}{4} a \cdot b \cdot V_e dt$

⇒ $V_e = \frac{k}{\epsilon_o \mu_o \omega} = c^2 \frac{k}{\omega} \Rightarrow V_e = \frac{c^2}{V_\phi} = V_g$

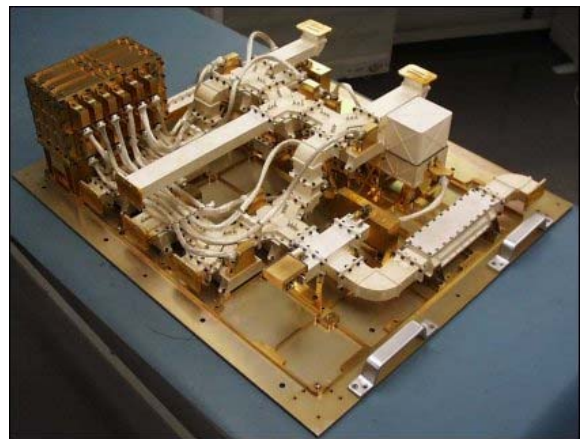
⇒ La vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de groupe.

6. EXEMPLES.

a. FOUR A MICRO-ONDES (F=2.4 GHz).



b. SATELLITE ASCAT (TROIS ANTENNES RECEPTRICES, F=5.3 GHz).



c. ANTENNE D'OUVERTURE
(LA FREQUENCE DEPEND DE LA TAILLE DE L'ANTENNE)

