

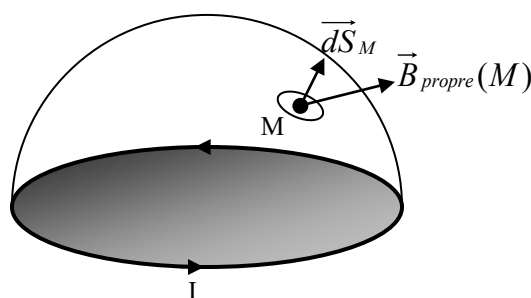
INDUCTION DE NEUMANN

Auto-induction, induction mutuelle

1. Auto-induction.

1.1. Flux propre.

Soit un circuit parcouru par un courant I .



Ce circuit crée un champ magnétique noté $\vec{B}_{propre}$

$$\text{Le flux propre de la bobine est alors : } \phi_{propre} = \iint \vec{B}_{propre}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

1.2. Auto-inductance L .

1.2.1. Définition.

En utilisant la loi de Biot et Savart on obtient : $\vec{B}_{propre} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$

Sachant que $\phi_{propre} = \iint \vec{B}_{propre}(M) \cdot d\vec{S}_M$, on peut donc sortir I de l'intégrale, et noter $\phi_{propre} = LI$

1.2.2. Propriétés.

L s'exprime en Henry ; et donc μ_0 s'exprime en H.m^{-1} . $L > 0$ (Voir 1.4.2.)

Et L ne dépend pas du matériau considéré, mais seulement de sa géométrie (on le voit sur la formule précédente, quand on sort l'intensité I)

1.2.3. Augmentation de L .

- Avec un barreau ferromagnétique :

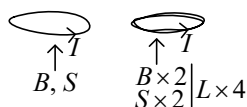


Le courant i va créer un champ $\vec{B}$, qui va être augmenté à cause du barreau. On aura alors un flux propre plus important, et une inductance L qui augmente aussi. Mais on aura alors $\phi = L(i) \times i$, c'est-à-dire que la variation avec i **ne sera plus linéaire** (il faut aussi que le barreau puisse s'aimanter et se désaimanter facilement, par exemple avec du fer doux).

- Avec un bobinage :

Si on augmente le nombre de spires dans un bobinage, on augmente la valeur de L.

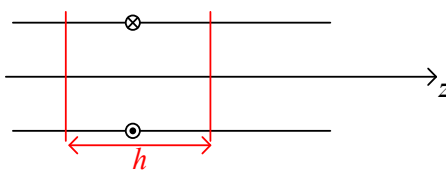
Exemple :



⇒ Pour N spires, L sera multiplié par N^2 .

1.2.4. Exemples.

- Solénoïde infini :

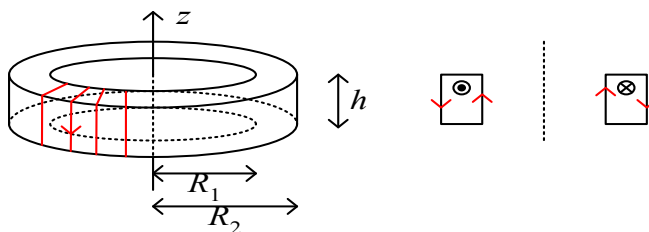


Le champ magnétique dans le solénoïde vaut : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$

Pour une spire on a donc : $\phi = \mu_0 n I S$; pour nh spires, $\phi = \underbrace{\mu_0 n^2 S h I}_L$

⇒ D'où $L = \mu_0 n^2 S h$

- Bobine torique de section rectangulaire :



Symétries :

On considère que le problème est invariant par rotation (c'est-à-dire qu'on a un bobinage très serré)

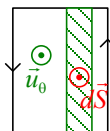
Tout plan contenant z est un plan de symétrie pour les courants : donc $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$

Théorème d'Ampère :

On choisit pour la circulation de $\vec{B}$ un cercle d'axe (Oz) et de rayon $r < R$

On a $B \times 2\pi r = \mu_0 I N$ et donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

Flux à travers une spire (ϕ) :



On a $d\varphi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \times h \cdot dr$ et donc $\varphi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \times h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Flux dans le tore (ϕ): $\phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot I$

Coefficient L : $L = \frac{\phi}{I}$ donc : $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

1.3. Force électromotrice d'auto-induction.

1.3.1. Cas général.

Si ϕ_{propre} varie, on aura une fem d'auto-induction

$e_{\text{auto}} = -\frac{d\phi_{\text{propre}}}{dt}$. Comme $\phi_{\text{propre}} = LI$, on a donc :

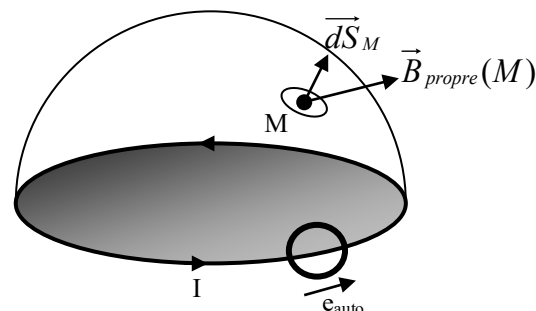
$$e_{\text{auto}} = -\frac{d(LI)}{dt}$$

Attention en convention générateur !

$\Rightarrow$ On peut donc avoir une fem d'auto-induction lorsque la géométrie du circuit varie ou lorsque l'intensité varie.

1.3.2. Pour un circuit indéformable.

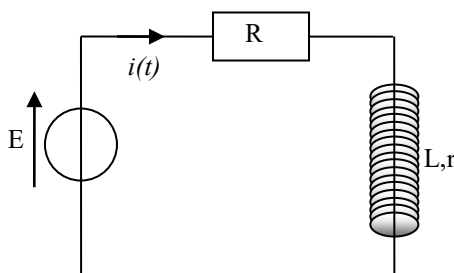
- On a alors : $L = \text{cte}$, et donc $e = -L \frac{dI}{dt}$ **Attention en convention générateur !**
- Notons que le signe négatif traduit la loi de Lenz.
- Si $\frac{dI}{dt}$ est très important (quand on coupe avec un interrupteur), on aura un champ électromoteur très intense, et on peut parfois observer au niveau de l'interrupteur des étincelles, indiquant une ionisation des molécules de l'air.



1.4. Energie.

1.4.1. Energie magnétique stockée dans une bobine indéformable.

Considérons une bobine réelle (L, r) reliée à un générateur de tension (E, R).



- Pour $t < 0$, le courant dans le circuit est nul et $E = 0$.
- A $t=0$, on allume le générateur : un courant $i(t)$ s'établit dans le circuit.

- A tout instant t , la loi des mailles s'écrit : $E = (R + r).i(t) - e_{ind}(t)$ où $e_{ind} = \frac{-d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow$ La puissance délivrée par le générateur s'écrit donc : $P_g(t) = E.i(t) = (R + r).i^2(t) + L.i(t) \cdot \frac{di}{dt}$

$$\Rightarrow P_g(t) = E.i(t) = (R + r).i^2(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right)$$

$\Rightarrow$ Pour faire passer le courant dans la bobine de 0 à $i(t)$, le générateur fournit un travail spécifique au

phénomène d'auto-induction : $W = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) dt = \int_{i(0)}^{i(t)} d \left(\frac{Li^2}{2} \right) = \frac{Li^2(t)}{2}$ ⁱ

$\Rightarrow$ Ce travail correspond à l'énergie stockée dans la bobine ou **énergie magnétique** : $E_m(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$ ⁱⁱ

- Sachant que le flux propre de la bobine s'écrit : $\phi(t) = L.i(t)$, l'énergie magnétique s'écrit aussi :

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \phi(t).i(t)$$

1.4.2. Généralisation : Energie magnétique propre d'un circuit.

- Le résultat précédent peut être généralisé à tout circuit, déformable ou non, possédant une inductance

propre L : L'énergie magnétique d'un tel circuit s'écrit $E_m(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} \phi(t).i(t)$.

- Cette énergie peut être également déterminée en utilisant la densité d'énergie magnétique associée au

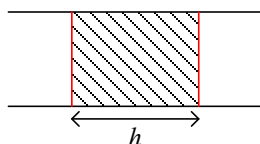
champ magnétique $\vec{B}$ créée : $E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau$. Sachant que $E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau > 0$, on en déduit que $L > 0$

1.4.3. Exemple de détermination d'une auto-inductance à partir de l'énergie magnétique.

En utilisant les résultats précédents, on a : $L = 2 \frac{U_m}{i^2} = \frac{1}{\mu_0 i^2} \iiint \vec{B}^2 d\tau$

Exemples :

- Solénoïde infini :

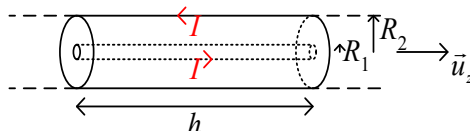


ⁱ Le travail reçu pendant dt est : $\delta W = i.d(Li) = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$ (pour $L = \text{cste}$)

ⁱⁱ L'énergie magnétique reçue pendant dt est $dE_m = i.d(Li) = id\phi = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) = d\left(\frac{1}{2} \phi i\right)$

On a $E_m = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 nI)^2 Sh = \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 n^2 Sh}_{L} I^2$

- Câble coaxial :



On a $\vec{j}_{s,1} = \frac{I}{2\pi R_1} \vec{u}_z$, $\vec{j}_{s,2} = \frac{-I}{2R_2} \vec{u}_z$

Calcul de $\vec{B}$:

On a déjà par symétrie $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$

Pour $r < R_1$, $B = 0$

Pour $R_1 < r < R_2$, $B \times 2\pi r = \mu_0 I$, donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

Pour $r > R_2$, $B = 0$.

On a ainsi $E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} h \cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Auto-inductance linéique :

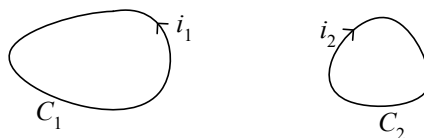
On a pour la portion de coaxial $L = \frac{\mu_0}{2\pi} h \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ Donc : $l = L/h = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

2. Induction mutuelle

2.1. Inductance mutuelle.

2.1.1. Définition

Soient deux circuits en interaction :



- Soit $\vec{B}_1$ le champ magnétique créé par le circuit C_1 et $\vec{B}_2$ le champ magnétique créé par le circuit C_2 . Le champ magnétique total créé en tout point de l'espace est $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$
- Soit ϕ_1 le flux de $\vec{B}$ à travers C_1 : $\phi_1 = \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 I_1 + M_{1,2} I_2$ où $\phi_{1 \rightarrow 1}$ est le flux propre de C_1 et $\phi_{2 \rightarrow 1}$ est le flux du champ $\vec{B}_2$ à travers C_1 .
De même ϕ_2 le flux de $\vec{B}$ à travers C_2 s'écrit : $\phi_2 = \phi_{2 \rightarrow 2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 I_2 + M_{2,1} I_1$

Soit :
$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{1,2} \\ M_{2,1} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- On définit ainsi les coefficients d'induction mutuelle :

$$\begin{cases} M_{1,2} = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2} \\ M_{2,1} = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} \end{cases}$$

2.1.2. Formule de Neumann.

On a :

$$\begin{aligned} \phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 = \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 \frac{d\vec{l}_2}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} I_2 \end{aligned}$$

On a donc :
$$M_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$

2.1.3. Théorème de Neumann.

Par symétrie, on a $M_{1,2} = M_{2,1} = M$

D'où le **théorème de Neumann** (ou théorème de réciprocité) :

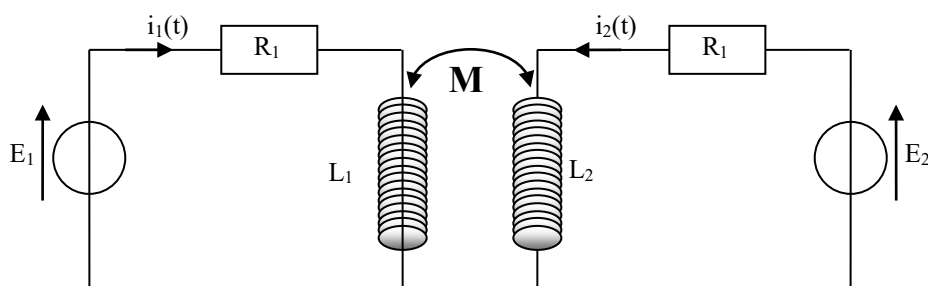
$$M_{1,2} = M_{2,1} = M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2}$$

Notons que M peut être positif ou négatif, en fonction de l'orientation choisie des circuits et que M dépend de la forme de chacun des circuits et de la distance entre eux.

2.1.4. Exemples.

2.1.4.1. Circuits électriques couplés.

Soient les deux circuits suivants comportant des bobines d'inductances L_1 et L_2 et d'inductance mutuelle M .

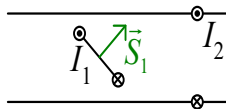


Les deux équations électriques s'écrivent :

$$\begin{cases} E_1 = R_1 i_1 - e_1 \\ E_2 = R_2 i_2 - e_2 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} e_1 = \frac{-d\phi_1}{dt} = \frac{-d}{dt} (L_1 i_1 + M i_2) \\ e_2 = \frac{-d\phi_2}{dt} = \frac{-d}{dt} (L_2 i_2 + M i_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

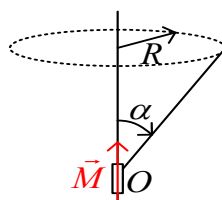
⇒ Les deux circuits électriques sont couplés en ce sens que les équations différentielles auxquelles les courants i_1 et i_2 obéissent le sont elles mêmes.

2.1.4.2. Flux envoyé par une spire dans un solénoïde.



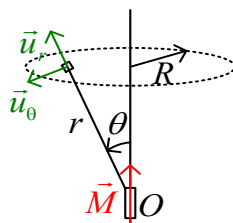
- On veut calculer le flux envoyé par la spire dans le solénoïde : Il faut déjà connaître le champ $\vec{B}$ créé par la spire (pas facile en dehors de l'axe...). Une fois qu'on y est arrivé, il faut ensuite calculer le flux à travers chaque spire du solénoïde...
- Mais avec le théorème de Neumann : On a $\phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 n_2 I_2 S_1 \cos \theta \Rightarrow \phi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 n_2 I_1 S_1 \cos \theta$.

2.1.4.3. Flux envoyé par un aimant sur un disque.



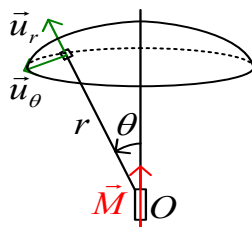
⇒ On cherche le flux envoyé par l'aimant de moment magnétique $\vec{M}$ dans le disque.

- Méthode 1 : On détermine le champ créé par l'aimant et on prend comme surface celle du disque :



⇒ On a $d\phi = (B_r \cos \theta - B_\theta \sin \theta) dS \dots$

- Méthode 2 : On utilise le champ créé par l'aimant et on prend comme surface une calotte sphérique :



⇒ La surface est donc une calotte sphérique centrée en O et contenant le cercle :

⇒ Cette fois, la composante de $\vec{B}$ selon $\vec{u}_\theta$ est rasante, et on a donc ⁱⁱⁱ :

ⁱⁱⁱ On rappelle : $\vec{B} = \left(B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta}{r^3}; B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3} \right)$

$$\begin{aligned}
 d\phi &= B_r dS = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{2 \cos \theta}{r^3} dS \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{2 \cos \theta}{r^3} r d\theta \cdot 2\pi r \sin \theta \quad (\text{Pour une petite languette d'angle constant}) \\
 \Rightarrow \phi &= \frac{\mu_0}{r} M \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 M}{2r} \sin^2 \alpha = \frac{\mu_0 M}{2R} \sin^3 \alpha
 \end{aligned}$$

- Méthode 3 : On utilise le théorème de Neumann :

On remplace l'aimant par une boucle de courant : $\vec{M} = i_1 S_1 \vec{u}_z$

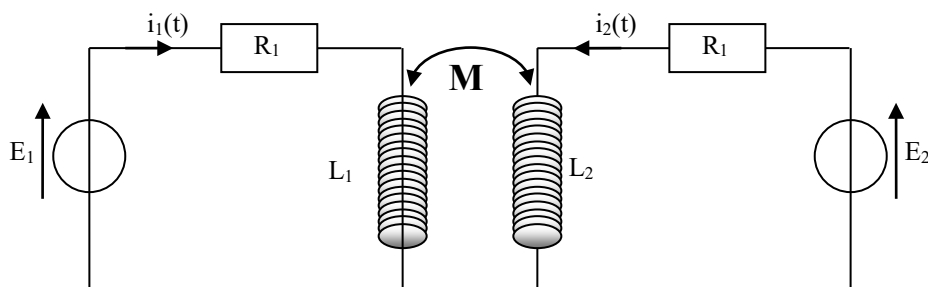
On imagine de plus que le cercle est une spire parcourue par un courant i_2

$$\text{Ainsi, } \phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{i_1}{i_2} \phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{i_1}{i_2} \left(\frac{\mu_0 i_2}{2R} \sin^3 \alpha \right) S_1 = \frac{\mu_0 M}{2R} \sin^3 \alpha$$

2.2. Aspect énergétique.

2.2.1. Energie d'interaction entre deux circuits.

Reprenons les deux circuits du paragraphe 2.1.4.1 .



- Le système d'équations différentielles vérifié par le système est :
$$\begin{cases} E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{La puissance délivrée par les générateurs est : } \begin{cases} P_1 = E_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ P_2 = E_2 i_2 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Soit, en termes de travail : } \begin{cases} E_1 i_1 dt = R_1 i_1^2 dt + L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 \\ E_2 i_2 dt = R_2 i_2^2 dt + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1 \end{cases} \quad \text{iv}$$

iv Dans l'équation différentielle du 1^{er} circuit on reconnaît : $\delta W_{\text{gén}} = E_1 i_1 dt$; $\delta W_{\text{Joule}} = R_1 i_1^2 dt$, qui n'est pas une différentielle totale, (pas d'énergie stockée) ; et $L_1 i_1 di_1 = d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right)$, énergie potentielle : Ce terme représente une énergie stockée (et disponible). Mais le troisième terme n'est pas une différentielle totale et représente pourtant une énergie potentielle (stockée dans les deux bobines). En effet, en ajoutant les deux équations différentielles, on trouve une différentielle totale $d(M i_1 i_2)$.

⇒ Le travail reçu par le 1^{er} circuit pendant dt est donc : $\delta W_1 = L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2$ tandis que celui reçu par le 2^{ème} circuit est $\delta W_2 = L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1$

⇒ En supposant les circuits indéformables et fixes l'un par rapport à l'autre, seuls ces travaux interviennent dans le bilan énergétique. On peut donc définir l'énergie magnétique du système comme le travail total des générateurs pour établir les courants i_1 et i_2 :

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1)$$

$$\Rightarrow dE_m = d\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$

- Sachant que : $\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$, on voit que E_m s'écrit aussi : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}(\phi_1 i_1 + \phi_2 i_2)}$
- Cette énergie peut être également déterminée en utilisant la densité d'énergie magnétique associée aux champs magnétique créés :

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}_1^2 d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}_2^2 d\tau + \frac{1}{\mu_0} \iiint \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 d\tau$$

⇒ On retrouve les termes d'énergie propre de chaque circuit, et l'énergie d'interaction $M i_1 i_2$.

- Sachant que $E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 d\tau > 0$ et que $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$ on en déduit que $\boxed{M^2 \leq L_1 L_2}$ ^v

Cette inégalité signifie que le déterminant de $\begin{pmatrix} L_1 & M_{1,2} \\ M_{2,1} & L_2 \end{pmatrix}$ est $\Delta = L_1 L_2 - M^2 \geq 0$

- Notons enfin que la présence d'un flux mutuel entre les deux circuits montre que l'énergie de ce système ne se réduit pas à la somme de leur énergie propre : **Les énergies ne sont pas additives.**

2.2.2. Généralisation : Energie d'interaction entre circuits

On considère k circuits en interaction.

En généralisant le résultat précédent, on obtient l'énergie magnétique totale du système : $\boxed{E_m = \sum \frac{1}{2} I_k \phi_k}$

^v En effet E_m s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = \frac{1}{2} \left(L_1 \underbrace{\left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2}_{\geq 0} + \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) \underbrace{i_2^2}_{\geq 0} \right)$

