

## X 2022 PC - Etude de l'étude de l'hélium superfluide métastable

Merci de signaler les erreurs éventuelles à [pchoche2020@gmail.com](mailto:pchoche2020@gmail.com).

Ce corrigé a été relu par Séverine Mensch

### 1 L'hélium liquide à basse température

**Q1** On applique le premier principe entre  $t$  et  $t+dt$  au système fermé constitué de la masse  $m$  d'hélium liquide. L'évolution étant isobare :

$$dH = P_{th} dt$$

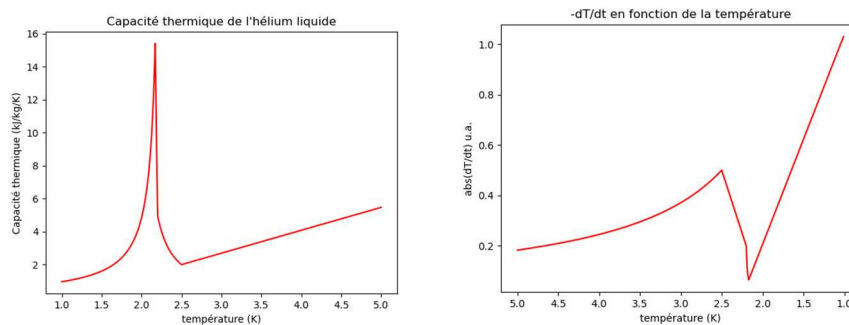
Cependant :

$$dH = mc_p(T) dT$$

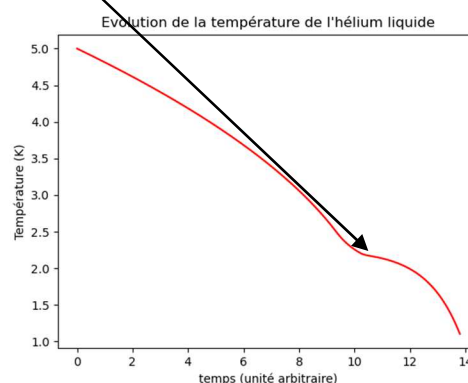
On en déduit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_{th}}{mc_p(T)}$$

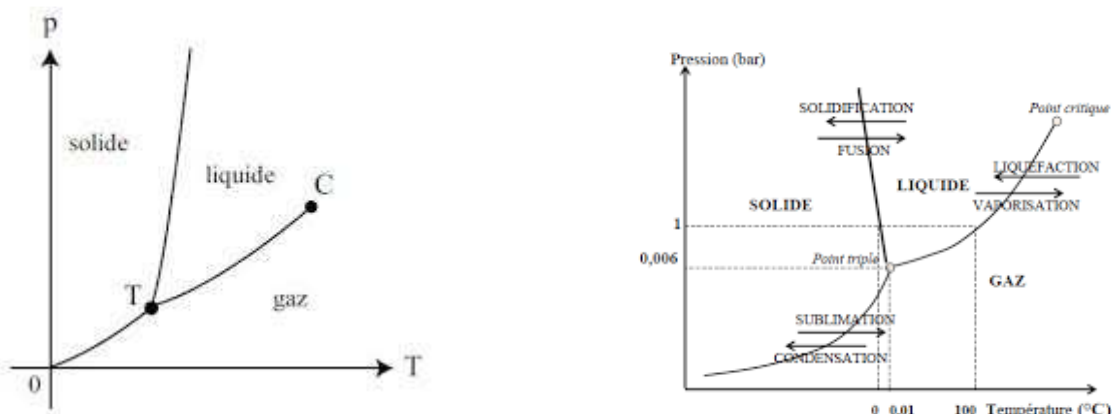
Au cours du refroidissement,  $c_p$  diminue d'abord, avant une augmentation brutale, laquelle s'accompagne donc d'une diminution marquée de  $\left| \frac{dT}{dt} \right|$ . Il s'en suit une deuxième étape, à partir de 2,17K, au cours de laquelle la capacité thermique diminue brutalement et donc  $\left| \frac{dT}{dt} \right|$  augmente significativement.



On observe ainsi **un quasi-palier de température** au voisinage de  $T_\lambda$ .



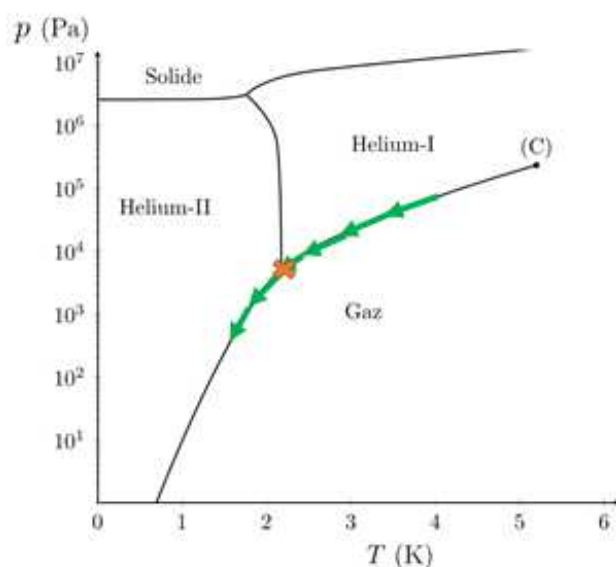
**Q2** Le diagramme d'état ( $p,T$ ) d'un corps pur est constitué de trois domaines (solide/liquide/vapeur, ci-dessous à gauche) dont les frontières ont des pentes généralement **positives** (l'eau est une exception, à droite, avec une courbe de coexistence solide/liquide qui admet une pente négative, tout au moins au-dessous d'une certaine pression).



Dans le cas de l'hélium, il faut prendre en compte un **point triple Hélium liquide II / Hélium liquide I / Gaz** et un point triple **Solide / Hélium liquide II / Hélium liquide I**. En d'autres termes, **il n'y a pas de point triple solide/liquide/gaz**.

Pour un corps pur « normal », lors d'un refroidissement le long de la ligne de coexistence avec la phase gazeuse, lorsque le point triple est franchi, on passe d'un équilibre **liquide / gaz** à un équilibre **solide / gaz**. On s'attend à une discontinuité de masse volumique de la phase condensée lors de ce franchissement.

Dans le cas de l'hélium, on passe d'un équilibre **hélium liquide I / gaz** à un équilibre **hélium liquide II / gaz**, sans que la phase solide n'apparaisse à l'équilibre avec la phase gazeuse. Par ailleurs, d'après la **figure 1-b**, la transition entre les deux phases de l'hélium liquide se produit **sans discontinuité de masse volumique**.



**Q3** Le modèle de l'**écoulement parfait** consiste à négliger tout phénomène diffusif :

- diffusion de quantité de mouvement : on néglige la **viscosité** :
  - l'écoulement est ainsi régi par l'**équation d'Euler** ;
  - cette équation est complétée par des conditions aux limites qui imposent à la **composante normale de la vitesse** de s'annuler sur une paroi fixe (mais la composante tangentielle peut être non nulle) ;
  - autour d'un corps, un écoulement parfait a un **nombre de Reynolds qui tend vers l'infini** ;
- diffusion d'énergie cinétique microscopique : on néglige les échanges thermiques diffusifs :
  - l'évolution d'une particule de fluide est **adiabatique** ;
  - comme tout phénomène diffusif est négligé, l'évolution est aussi **réversible**, donc **isentropique** ;

**Q4** Sous la température  $T_\lambda$ , d'après la **figure 1-b**, la masse volumique de l'hélium liquide est de l'ordre de :

$$\rho = 145 \text{ kg.m}^{-3}$$

En attribuant à chaque atome le volume  $a^3$  :  $a = \left( \frac{m_{\text{He}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$

Soit :  $a \approx \left( \frac{7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,5 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}}$  donc  $a \approx 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Un atome d'hélium d'énergie cinétique  $E_c \approx 3k_B T$  est non relativiste et a une quantité de mouvement de norme :  $p = \sqrt{2m_{\text{He}} E_c}$  soit  $p = \sqrt{6m_{\text{He}} k_B T}$

On déduit de la **relation de de Broglie** la longueur d'onde de de Broglie de l'atome d'hélium :

$$\Lambda = \frac{h}{p} \quad \text{soit} \quad \Lambda = \frac{h}{\sqrt{6m_{\text{He}} k_B T}}$$

Si la température diminue, la longueur d'onde de Broglie de l'atome d'hélium augmente, ce qui va dans le sens d'**effets quantiques plus prononcés** (au sens où les fonctions d'onde des différents atomes « se superposent »). Avec le critère retenu, les effets quantiques se manifestent à une température inférieure à :

$$T_c = \frac{h^2}{6a^2 m_{\text{He}} k_B}$$

$$\text{AN} \quad T_c = \frac{(7.10^{-34} \text{ J.s})^2}{6 \times (3.5.10^{-10} \text{ m})^2 \times (7.10^{-27} \text{ kg}) \times (1.4.10^{-23} \text{ J.K}^{-1})}$$

Soit :

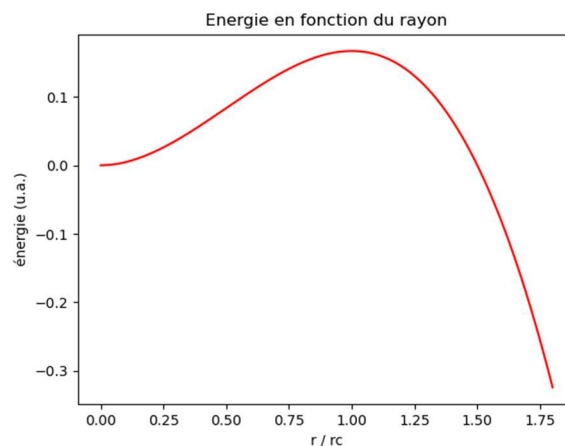
$$\boxed{T_c = 7 \text{ K}}$$

On retrouve un **ordre de grandeur** cohérent avec la température  $T_\lambda$  .

## 2 Etats métastables et cavitation

### 2.1 Métastabilité et cavitation

**Q5** L'énergie surfacique de tension superficielle est  $\gamma$  et l'aire de l'interface entre les deux phases est celle d'une sphère, donc  $4\pi r^2$ , d'où le second terme. Ce terme est positif car une augmentation de l'aire de l'interface a un coût énergétique.



On déduit de l'expression de l'énergie :

$$\frac{d\Delta E}{dr} = 4\pi r^2 (p - p_{sat}) + 8\pi\gamma r \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta E}{dr^2} = 8\pi r (p - p_{sat}) + 8\pi\gamma$$

La dérivée première s'annule en  $r = 0$ , mais aussi en :

$$\boxed{r_c = \frac{2\gamma}{p_{sat} - p}}$$

La dérivée seconde y vaut :  $\frac{d^2\Delta E}{dr^2}(r = r_c) = -8\pi\gamma < 0$  (alors qu'elle vaut  $8\pi\gamma > 0$  en  $r = 0$ ). Il s'agit donc bien d'un maximum en  $r = r_c$ .

A cette valeur du rayon : 
$$\Delta E = 4\pi (p_{sat} - p) \left( -\frac{r_c^3}{3} + \frac{\gamma}{p_{sat} - p} r_c^2 \right)$$

Soit : 
$$\Delta E = 4\pi \frac{2\gamma}{r_c} \left( -\frac{r_c^3}{3} + \frac{r_c^3}{2} \right)$$

Finalement : 
$$\Delta E^* = \frac{4\pi}{3} \gamma r_c^2$$
 ou 
$$\Delta E^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3(p_{sat} - p)^2}$$

L'**état métastable** correspond à  $r = 0$  (absence de bulle de gaz) et il faut apporter (au moins) l'énergie  $\Delta E^*$  pour franchir l'état (instable)  $r = r_c$ , à partir duquel il y a rupture de métastabilité.

**Q6** Par analogie avec la **loi d'Arrhenius**, on peut proposer une probabilité de franchissement de la barrière d'énergie potentielle, donc de cavitation, de la forme :

$$\Gamma = \Gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$$

Une **distribution de Boltzmann** des fluctuations d'énergie  $\Delta E$  permet de montrer que la probabilité  $P(\Delta E > \Delta E^*)$  est effectivement proportionnelle à  $\exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$ .

**Q7** A faible température, l'hélium liquide peut être très pur (introduction de cette partie), donc  $\Delta E^*$  **est plus élevé**, ce qui implique, d'après **Q6**, que  $\Gamma$  est plus faible. Cet effet est renforcé par l'augmentation de  $\frac{1}{T}$ , lorsque  $T$  diminue, dans le facteur  $\exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$ .

**Q8** Pour que la cavitation ait lieu entre  $t$  et  $t+dt$  (probabilité  $\Sigma(t+dt) - \Sigma(t)$ ), elle doit se produire pendant la durée  $dt$  (probabilité  $\Gamma V dt$ ), alors qu'elle n'a pas eu lieu entre 0 et  $t$  (probabilité  $1 - \Sigma(t)$ ). Ces deux « événements » étant indépendants :

$$\Sigma(t+dt) - \Sigma(t) = (1 - \Sigma(t)) \Gamma V dt$$

On en déduit : 
$$\frac{d\Sigma}{1 - \Sigma} = \Gamma V dt$$

Cette équation s'intègre en : 
$$-\ln \frac{1 - \Sigma(t)}{1 - \Sigma(0)} = \Gamma V t$$

On en déduit : 
$$\Sigma(t) = 1 - \exp(-\Gamma V t)$$

**Q9** La pression de cavitation est déduite de :  $\Gamma V \tau = \ln 2$

$$\text{D'où : } \Gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right) V \tau = \ln 2$$

$$\text{Ainsi : } \Delta E^* = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V \tau}\right) \cdot k_B T$$

$$\text{Donc : } \frac{4\pi}{3} \gamma r_c^2 = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V \tau}\right) \cdot k_B T$$

$$\text{Soit : } \frac{16\pi}{3} \frac{\gamma^3}{(p_{sat} - p_c)^2} = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V \tau}\right) \cdot k_B T$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{p_c = p_{sat} - \sqrt{\frac{16\pi\gamma^3}{3k_B T \ln\left(\frac{\Gamma_0 V \tau}{\ln 2}\right)}}$$

Si la température diminue, cette pression peut s'annuler et devenir **négative**.

A une température tendant vers 0, la pression précédente tendrait vers  $-\infty$ .

Pour maximiser  $|p_c|$  avec  $p_c < 0$ , il faut choisir un **petit volume** et une durée  $\tau$  faible.

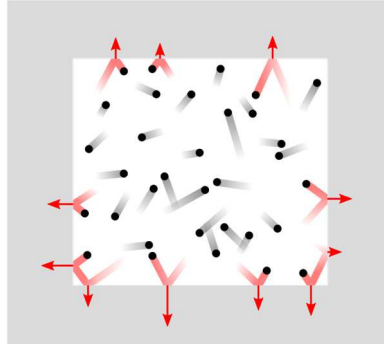
## 2.2 Pression négative

**Q10** La pression exercée par un gaz parfait sur une paroi peut s'interpréter en termes de **transfert de quantité de mouvement** au cours de chocs molécules / paroi. Dans le cadre d'un modèle très simplifié, la vitesse d'une molécule appartient à  $\{-u\vec{e}_x, u\vec{e}_x, -u\vec{e}_y, u\vec{e}_y, -u\vec{e}_z, u\vec{e}_z\}$ , ces six valeurs étant équiprobables. On note  $n$  la densité volumique de molécules e masse  $m$ . En considérant que la normale à la paroi (orientée du gaz vers la paroi) est  $\vec{e}_z$ , la quantité de mouvement cédée pendant la durée  $dt$  par les molécules à un élément de paroi d'aire  $dS$  est :

$$-\frac{1}{6} n dS u dt (-m u \vec{e}_z - (m u \vec{e}_z)) = \frac{1}{3} n m u^2 dS dt \vec{e}_z$$

Ce transfert de quantité de mouvement est associé à une force  $\frac{1}{3} n m u^2 dS \vec{e}_z = \frac{1}{3} n m u^2 \overline{dS}$  exercée sur la paroi.

On en déduit la **pression cinétique** :  $\boxed{P = \frac{1}{3} n m u^2}$  toujours positive.



**Q11** A basse température, l'énergie d'agitation thermique est faible et elle peut être dominée (en valeur absolue) par l'**énergie d'interaction attractive** entre molécules.

Dans l'équation d'état du **gaz de Van der Waals**, la contribution des interactions attractives apparaît dans le terme de « pression interne »  $-a \frac{N^2}{V^2}$  :

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2}$$

La pression (totale) devient donc négative à une température inférieure à :

$$T^* = \frac{a}{k_B} \frac{N}{V^2} (V - Nb)$$

**Q12** En supposant la sève incompressible, la pression est donnée par la **loi de Pascal**, soit en fonction de l'altitude  $z$  :

$$p(z) = p_0 - \rho g z$$

Elle devient négative au-delà de :

$$z_c = \frac{p_0}{\rho g}$$

AN

$$z_c = 10m$$

Il existe des arbres de plus grande hauteur et une pression négative est donc envisageable.

### 3 Etude expérimentale des états métastables de l'hélium

#### 3.1 Mesure de $\rho$ par interférométrie

**Q13** On représente une évolution sinusoïdale de moyenne temporelle  $p_{sat}$  et d'amplitude  $\delta p$ . L'état est métastable sur des demi-périodes pendant lesquelles  $p < p_{sat}$ . La durée caractéristique d'un état métastable est donc :

$$\frac{1}{2f} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Au cours de cette durée, l'onde sonore se propage sur :

$$\delta x = \frac{c}{2f} \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta x \approx 10^{-4} \text{ m}}$$

Si  $\delta p > p_{sat}$ , la pression devient négative dans l'hélium pendant une fraction de (demi-)période.

**Q14** D'après la relation de Clausius-Mossotti :  $\rho = \frac{3m_{He}}{4\pi\alpha} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2+2}$

Si  $n = 1 + \varepsilon$  avec  $|\varepsilon| \ll 1$  :

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2+2} = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{3+2\varepsilon+\varepsilon^2}$$

A l'ordre 1 en  $\varepsilon$  :

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2+2} \approx \frac{2}{3}\varepsilon$$

Ainsi :

$$\rho \approx \frac{m_{He}}{2\pi\alpha} (n-1)$$

On en déduit, par différenciation logarithmique :  $\boxed{\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta n}{n-1}}$

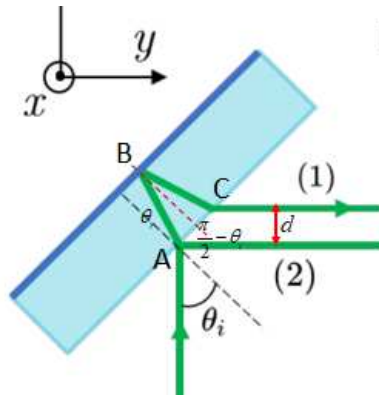
**Q15** Un rayon incident est divisé en deux rayons qui empruntent des chemins différents et il s'agit donc d'un **diviseur d'amplitude**.

**Q16** En s'appuyant sur la figure ci-dessous :  $d = AC \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$

Cependant :  $AC = 2e \tan \theta_r$



On en déduit : 
$$d = 2e \frac{\sin \theta_r}{\cos \theta_r} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_i \right) \quad \text{soit} \quad d = 2e \frac{\sin \theta_r}{\cos \theta_r} \cos \theta_i$$



Cependant : 
$$\cos \theta_r = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r}$$

D'après la deuxième loi de Snell-Descartes de la réfraction : 
$$\sin \theta_i = n_v \sin \theta_r$$

D'où : 
$$\cos \theta_r = \sqrt{1 - \frac{1}{n_v^2} \sin^2 \theta_i}$$

Ainsi : 
$$d = 2e \frac{n_v \sin \theta_r}{\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i}} \cos \theta_i$$

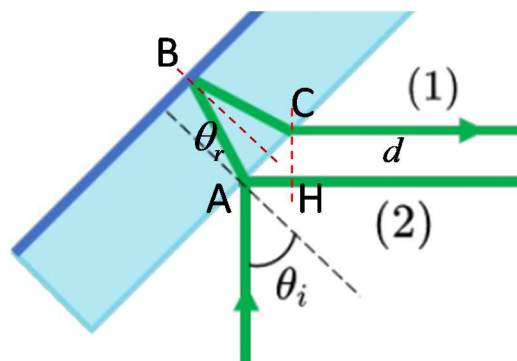
En utilisant de nouveau la deuxième loi de Snell-Descartes relative à la réfraction :

$$d = 2e \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i}} \cos \theta_i$$

Finalement :

$$d = e \frac{\sin 2\theta_i}{\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

**Q17** Il s'agit d'établir l'expression de la différence de marche dans le cas d'une lame mince en réflexion (figure ci-dessous).



La différence de marche s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta_{1/2} &= [\infty ABC \infty'] - [\infty AH \infty'] \\ &= ([\infty A] + [AB] + [BC] + [C \infty']) - ([\infty A] + [AH] + [H \infty']) \\ &= [AB] + [BC] - [AH] + ([C \infty'] - [H \infty'])\end{aligned}$$

La dernière parenthèse est nulle par application du principe du retour inverse de la lumière et du théorème de Malus.

Il reste donc : 
$$\delta_{1/2} = n_v (AB + BC) - AH$$

Cependant : 
$$AB = BC = \frac{e}{\cos \theta_r} \quad \text{et} \quad AH = 2e \tan \theta_r \sin \theta_i$$

Ainsi : 
$$AH = 2n_v e \frac{\sin^2 \theta_r}{\cos \theta_r}$$

D'où : 
$$\delta_{1/2} = 2n_v e \frac{1 - \sin^2 \theta_r}{\cos \theta_r} \quad \text{donc} \quad \delta_{1/2} = 2n_v e \cos \theta_r$$

On en déduit le déphasage introduit sur le chemin (1) par rapport au chemin (2) :

$$\Phi_{1/2}(\theta_i) = -\frac{4\pi}{\lambda} n_v e \cos \theta_r$$

Soit : 
$$\boxed{\Phi_{1/2}(\theta_i) = -\frac{4\pi}{\lambda} e \sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad \text{pour la première lame.}$$

De même : 
$$\boxed{\Phi_{1/2}(\theta_i) = \frac{4\pi}{\lambda} e \sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad \text{pour la deuxième lame.}$$

En l'absence d'onde sonore, il n'y a donc pas de déphasage entre les deux faisceaux lorsqu'ils sont recombinaés.

**Q18** Si les deux lames ne sont pas parallèles :

$$\delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} n_v e \left( \sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i'} - \sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i} \right)$$

Soit, en supposant l'écart au parallélisme assez faible :

$$\delta\Phi = -\frac{4\pi}{\lambda} n_v e \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{2\sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta_i}} \delta\theta$$

D'où :

$$\delta\Phi = -2\pi \frac{d}{\lambda} \delta\theta$$

**Q19** La différence de phase s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \int_{-A(x,z)}^{A(x,z)} \frac{2\pi}{\lambda} \delta n \cdot dy \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-A(x,z)}^{A(x,z)} \delta n(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \cdot dy \\ &= \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{A(x,z)} \delta n(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \cdot dy \end{aligned}$$

### 3.2 Mesure de la fréquence Brillouin

**Q20a** Dans domaine de l'approximation conique du faisceau gaussien, ce dernier a une demi-ouverture angulaire :

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_{\min}}$$

On en déduit :

$$w_{\min} = \frac{\lambda}{\pi\theta_0}$$

AN  $w_{\min} = \frac{10^{-6} m}{7\pi \cdot 10^{-2} rad}$  soit  $w_{\min} = 5 \cdot 10^{-6} m$

Dans **Q13**, on a évalué la longueur caractéristique du domaine métastable à  $\delta x \approx 10^{-4} m$ . On a donc :

$$\frac{\delta x}{w_{\min}} = 20 \quad \text{ce qui permet d'avoir une}$$

résolution spatiale du domaine d'hélium liquide métastable qui semble assez limitée (20 « pixels » !).

**Q20b** La **longueur de Rayleigh** du faisceau gaussien est :

$$L_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \text{soit} \quad L_R \approx 8 \cdot 10^{-4} m$$

La région métastable est observée au voisinage du plan du waist du faisceau. L'étendue spatiale de la région étudiée est environ 8 fois plus faible que la longueur de Rayleigh. Il est donc raisonnable de considérer que l'on se trouve dans le domaine d'approximation cylindrique du faisceau.

**Q21a** Pour la lumière dans l'hélium liquide, d'indice optique supposé suffisamment proche

de 1 :

$$\| \vec{k}_i \| = \frac{\omega_i}{c}$$

Pour le son dans l'hélium liquide :

$$\boxed{\|\vec{q}_B\| = \frac{\Omega_B}{v}}$$

**Q21b** La **conservation de l'impulsion** {photon incident + phonon  $\rightarrow$  photon diffusé} s'écrit :

$$\hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{q}_B = \hbar\vec{k}_2 \quad (\text{A})$$

La **conservation de l'énergie** de {photon incident + phonon  $\rightarrow$  photon diffusé} implique :

$$\hbar\omega_1 + \hbar\Omega_B = \hbar\omega_2 \quad (\text{B})$$

**Q21c** On déduit de (1) :

$$\vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \vec{q}_B$$

D'où :

$$\vec{k}_2^2 + \vec{k}_1^2 - 2\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = \vec{q}_B^2$$

Soit, d'après **Q21a** :

$$\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 - 2\frac{\omega_1\omega_2}{c^2}\cos\theta = \frac{\Omega_B^2}{v^2} \quad (\text{C})$$

Cependant (B) implique :

$$\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 = \Omega_B^2$$

Donc :

$$\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 - 2\frac{\omega_1\omega_2}{c^2} = \frac{\Omega_B^2}{c^2} \quad (\text{D})$$

On retranche membre à membre (D) de (C) :

$$2\frac{\omega_1\omega_2}{c^2}(1 - \cos\theta) = \frac{\Omega_B^2}{v^2} - \frac{\Omega_B^2}{c^2}$$

Cependant :

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega \quad \text{et} \quad v \ll c$$

D'où :

$$4\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\Omega_B^2}{v^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\Omega_B = 2\omega\frac{v}{c}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Pour un angle de diffusion  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$f_B \approx 2f\frac{v}{c}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$$

D'où :

$$f_B \approx 1,4 \times \frac{200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{10^{-6}\text{m}} \quad \text{soit} \quad \boxed{f_B \approx 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}}$$

On a donc effectivement :

$$f_B \ll f = \frac{c}{\lambda} = 3.10^{14} \text{ Hz}$$

**Q22** On reporte l'expression  $\underline{\rho}_1(\vec{r}, t) = \underline{\delta\rho} \exp(i(\Omega_B t - \vec{Q} \cdot \vec{r}))$  dans l'équation de propagation, d'où :

$$(-\Omega_B^2 - \Gamma'(-Q^2))i\Omega_B + v^2 Q^2 \underline{\rho}_1 = 0$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$Q^2 = \frac{\Omega_B^2}{v^2 + i\Gamma'\Omega_B}$$

Ainsi :

$$Q^2 = \frac{\Omega_B^2}{v^2 \left(1 + i \frac{\Gamma'\Omega_B}{v^2}\right)}$$

et au premier ordre :

$$Q \simeq \frac{\Omega_B}{v} \left(1 - i \frac{\Gamma'\Omega_B}{2v^2}\right)$$

de la forme :  $Q = a - ib$  en identifiant :

$$a \simeq \frac{\Omega_B}{v}$$

et

$$b \simeq \frac{\Gamma'\Omega_B^2}{2v^3}$$

**Q23** La pression stricte est négative et quadratique en l'amplitude du champ : le fluide est « attiré » vers les régions de pressions plus faibles, qui sont celles où le champ électrostatique est plus intense. L'effet de cette pression est donc de **contracter le milieu**.

La force volumique a pour expression :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p_{st} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e \overrightarrow{\text{grad}} (\overline{E^2})$$

**Q24** Etant donné l'expression du champ électrique :

$$\langle \overline{E} \cdot \overline{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{E} \cdot \overline{E}^*) \quad \text{soit} \quad \langle \overline{E} \cdot \overline{E} \rangle = \frac{1}{2} \overline{E}_{1,0}(z) \cdot \overline{E}_{1,0}^*(z)$$

Ainsi :

$$p_{st} = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \gamma_e \overline{E}_{1,0}(z) \cdot \overline{E}_{1,0}^*(z)$$

**Q25** En superposant les deux champs électriques :

$$\langle \overline{E} \cdot \overline{E} \rangle = \langle \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 \rangle + \langle \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2 \rangle + 2 \langle \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 \rangle$$

La moyenne étant réalisée sur une durée  $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_2}$ , mais telle que  $\tau \ll \frac{2\pi}{\Omega}$  :

$$\langle \overline{E} \cdot \overline{E} \rangle = \frac{1}{2} \overline{E}_{1,0}(z) \cdot \overline{E}_{1,0}^*(z) + \frac{1}{2} \overline{E}_{2,0}(z) \cdot \overline{E}_{2,0}^*(z) + \text{Re}(\overline{E}_{1,0}(z) \cdot \overline{E}_{2,0}^*(z) \exp(i(\Omega t - qz)))$$

Le dernier terme peut s'écrire :

$$\left| \overline{E}_{1,0}(z) \right| \left| \overline{E}_{2,0}(z) \right| \cos(\Omega t - qz + \varphi_1 - \varphi_2)$$

**Q26** D'après l'énoncé, on peut négliger les dérivées selon  $z$  des deux premiers termes et du produit  $\overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z)$ . Il reste donc :

$$\overline{\text{grad}} \langle \overline{\underline{E}} \cdot \overline{\underline{E}} \rangle \simeq \text{Re} \left( \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z) \overline{\text{grad}} \left( \exp(i(\Omega t - qz)) \right) \right)$$

Soit :

$$\overline{\text{grad}} \langle \overline{\underline{E}} \cdot \overline{\underline{E}} \rangle \simeq -iq \text{Re} \left( \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z) \exp(i(\Omega t - qz)) \right) \overline{u}_z$$

On en déduit la **force volumique** de pression stricitive :

$$\boxed{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e \overline{\text{grad}} \langle \overline{\underline{E}} \cdot \overline{\underline{E}} \rangle \simeq -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e iq \text{Re} \left( \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z) \exp(i(\Omega t - qz)) \right) \overline{u}_z}$$

Puis le terme de forçage :

$$\text{div} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e \overline{\text{grad}} \langle \overline{\underline{E}} \cdot \overline{\underline{E}} \rangle \right) \simeq -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e iq \text{Re} \left( \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z) \text{div} \left( \exp(i(\Omega t - qz)) \right) \overline{u}_z \right)$$

Soit :

$$\boxed{\text{div} \overline{f} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e q^2 \text{Re} \left( \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z) \exp(i(\Omega t - qz)) \right)}$$

**Q27** On reporte sa représentation complexe  $-\frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e q^2 \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z) \exp(i(\Omega t - qz))$  dans l'équation de propagation, ainsi que la représentation complexe  $\rho_0 + \underline{\delta\rho} \exp(i(\Omega t - qz))$  de la masse volumique, d'où :

$$\left( -\Omega^2 - \Gamma'(-q^2) i\Omega + v^2 q^2 \right) \underline{\delta\rho} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e q^2 \overline{\underline{E}}_{1,0}(z) \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0}^*(z)$$

On retrouve l'expression demandée en posant :

$$\eta(q, \Omega) = \frac{q^2}{\Omega^2 - (v^2 + i\Gamma' \Omega) q^2}$$

En posant  $\Gamma_B = q^2 \Gamma'$  et  $\Omega_B = qv$  :

$$\boxed{\eta(q, \Omega) = \frac{q^2}{\Omega^2 - i\Gamma_B \Omega - \Omega_B^2}}$$

**Q28** On déduit de l'expression de  $I_2$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_2}{dz} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( \overline{\underline{E}}_{2,0} \frac{d\overline{\underline{E}}_{2,0}^*}{dz} + \overline{\underline{E}}_{2,0}^* \frac{d\overline{\underline{E}}_{2,0}}{dz} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( -\overline{\underline{E}}_{2,0} \frac{i\omega_2 \gamma_e}{4c\rho_0} \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \underline{\delta\rho} + \overline{\underline{E}}_{2,0}^* \frac{i\omega_2 \gamma_e}{4c\rho_0} \overline{\underline{E}}_{1,0} \underline{\delta\rho}^* \right) \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left( -\overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \frac{i\omega_2 \gamma_e}{4c\rho_0} \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e \eta(q, \Omega) \overline{\underline{E}}_{1,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0} + \overline{\underline{E}}_{2,0}^* \cdot \frac{i\omega_2 \gamma_e}{4c\rho_0} \overline{\underline{E}}_{1,0} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \gamma_e \eta^*(q, \Omega) \overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \right) \\
 &= \frac{\varepsilon_0^2 \gamma_e^2 \omega_2}{16\rho_0} i \left( -\overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \eta(q, \Omega) \overline{\underline{E}}_{1,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0} + \overline{\underline{E}}_{2,0}^* \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0} \eta^*(q, \Omega) \overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \right) \\
 &= \frac{\varepsilon_0^2 \gamma_e^2 \omega_2}{16\rho_0} i \left( -\overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \eta(q, \Omega) \overline{\underline{E}}_{1,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0} + \overline{\underline{E}}_{2,0}^* \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0} \eta^*(q, \Omega) \overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \right)
 \end{aligned}$$

Les champs électriques sont colinéaires, d'où :  $\left( \overline{\underline{E}}_{2,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{1,0}^* \right) \left( \overline{\underline{E}}_{1,0} \cdot \overline{\underline{E}}_{2,0} \right) = \left| \overline{\underline{E}}_{1,0} \right|^2 \left| \overline{\underline{E}}_{2,0} \right|^2$

Par conséquent :  $\frac{dI_2}{dz} = \frac{\varepsilon_0^2 \gamma_e^2 \omega_2}{16\rho_0} i \left( \eta^*(q, \Omega) - \eta(q, \Omega) \right) \left| \overline{\underline{E}}_{1,0} \right|^2 \left| \overline{\underline{E}}_{2,0} \right|^2$

Ce qui est proportionnel à :  $i\omega_2 \left( -\eta(q, \Omega) + \eta^*(q, \Omega) \right) I_1 I_2 = 2\omega_2 \operatorname{Im}(\eta(q, \Omega)) I_1 I_2$

D'après **Q27** :  $\operatorname{Im}(\eta(q, \Omega)) = \frac{q^2 \Gamma_B \Omega}{(\Omega^2 - \Omega_B^2)^2 + (\Gamma_B \Omega)^2}$

Ou encore :  $\operatorname{Im}(\eta(q, \Omega)) = \frac{1}{\Gamma'} \frac{\Gamma_B^2 \Omega}{(\Omega^2 - \Omega_B^2)^2 + (\Gamma_B \Omega)^2}$

Avec les approximations suggérées :  $\operatorname{Im}(\eta(q, \Omega)) = \frac{1}{\Gamma' \Omega_B} \frac{\Gamma_B^2}{4\Delta\Omega^2 + (\Gamma_B)^2}$

Soit :  $\operatorname{Im}(\eta(q, \Omega)) = \frac{1}{\Gamma' \Omega_B} \frac{\left( \frac{\Gamma_B}{2} \right)^2}{\Delta\Omega^2 + \left( \frac{\Gamma_B}{2} \right)^2}$

**Il y a donc un problème de signe (l'un des signes de l'équation (10) serait-il inexact ?). On**

retrouve effectivement une expression :  $\frac{dI_2}{dz} = -g_\infty \frac{\left( \frac{\Gamma_B}{2} \right)^2}{\Delta\Omega^2 + \left( \frac{\Gamma_B}{2} \right)^2} I_1 I_2$  **mais avec les calculs**

**précédents, on obtient un  $g_\infty$  négatif !**

**Q29** Si  $I_1(z)$  est quasiment uniforme :  $\frac{dI_2}{dz} \simeq -KI_2(z)$  avec  $K = g_\infty \frac{\left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2}{\Delta\Omega^2 + \left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2} I_1$

$I_2(z)$  est donc de la forme :  $I_2(z) = I_2(0)\exp(-Kz)$

L'onde 2 se propage **selon les  $z$  décroissants** et il s'agit donc ici d'une **amplification**.

A la résonance,  $K$  est maximum et l'amplification est plus prononcée.

Hors résonance, on peut supposer  $K$  faible, donc  $I_2(z)$  quasiment uniforme.

On fait varier la pulsation  $\omega_2$  jusqu'à obtenir l'amplification la plus marquée de  $I_2(z)$ .

**Q30** On veut obtenir :  $\exp(g_\infty I_1 \delta) = 1 + 10^{-2}$

Soit :  $g_\infty I_1 \delta \simeq 10^{-2}$

On en déduit :

$$I_1 \simeq 10^{12} \text{ W.m}^{-2}$$

Cette intensité est très élevée ! Il faut probablement utiliser un **laser impulsionnel** concentrant une énergie non négligeable sur une durée très brève. Il faut aussi utiliser une optique permettant de focaliser fortement le faisceau.

**Q31** La durée de l'impulsion laser doit être inférieure à la durée de vie de l'état métastable,

soit :  $\tau_i < \frac{\delta}{\nu} \simeq 20 \text{ ns}$

Plus la durée de l'impulsion est courte, plus **le spectre est large**.

Ici, la résolution spectrale serait de l'ordre de  $\frac{1}{\tau_i} \simeq 50 \text{ MHz}$ , que l'on peut comparer à  $f_B \simeq 300 \text{ MHz}$ . La résolution spectrale est d'autant plus limitée que l'impulsion est courte.

**Q32** On déduit de l'expression de la célérité :  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = v^2$

Cependant :  $v = f_B(\rho) \lambda$

On a ainsi :  $p(\rho) = p_{sat} + \int_{\rho(p_{sat})}^{\rho} f_B^2(\rho') \lambda^2 d\rho'$

(ce qui suppose cependant d'observer à  $\theta = Cte$ ).