

X 2022 PC - Etude de l'étude de l'hélium superfluide métastable

Merci de signaler les erreurs éventuelles à pchoche2020@gmail.com.

Ce corrigé a été relu par Séverine Mensch

1 L'hélium liquide à basse température

Q1 On applique le premier principe entre t et $t+dt$ au système fermé constitué de la masse m d'hélium liquide. L'évolution étant isobare :

$$dH = P_{th} dt$$

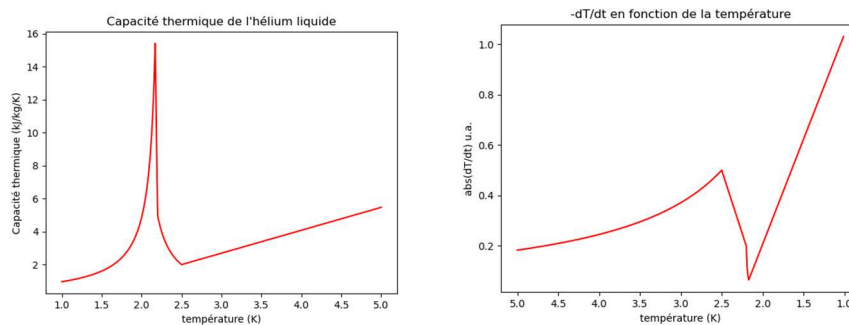
Cependant :

$$dH = mc_p(T) dT$$

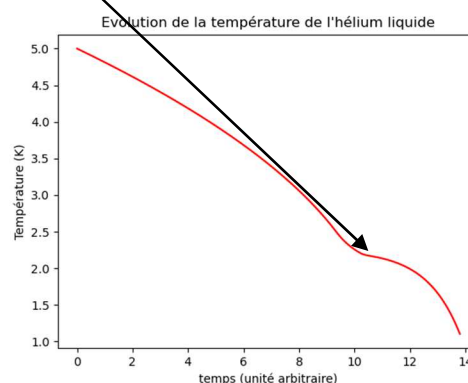
On en déduit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_{th}}{mc_p(T)}$$

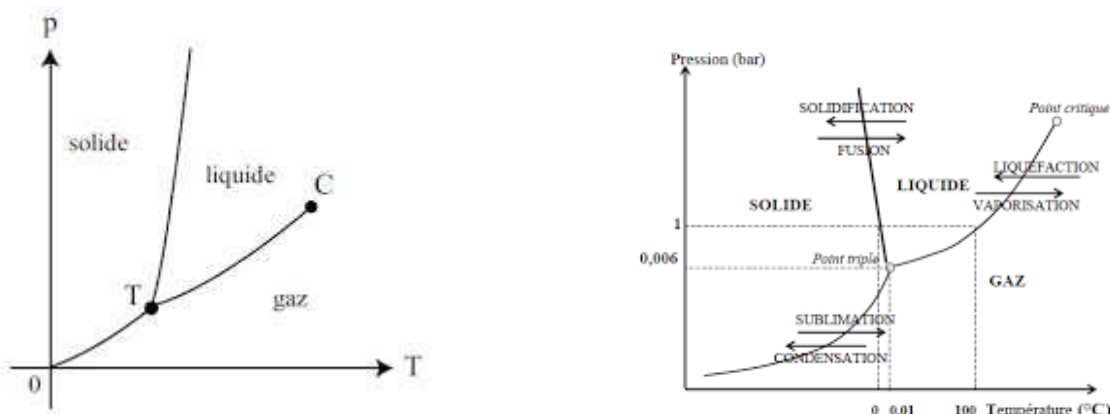
Au cours du refroidissement, c_p diminue d'abord, avant une augmentation brutale, laquelle s'accompagne donc d'une diminution marquée de $\left| \frac{dT}{dt} \right|$. Il s'en suit une deuxième étape, à partir de 2,17K, au cours de laquelle la capacité thermique diminue brutalement et donc $\left| \frac{dT}{dt} \right|$ augmente significativement.



On observe ainsi **un quasi-palier de température** au voisinage de T_λ .



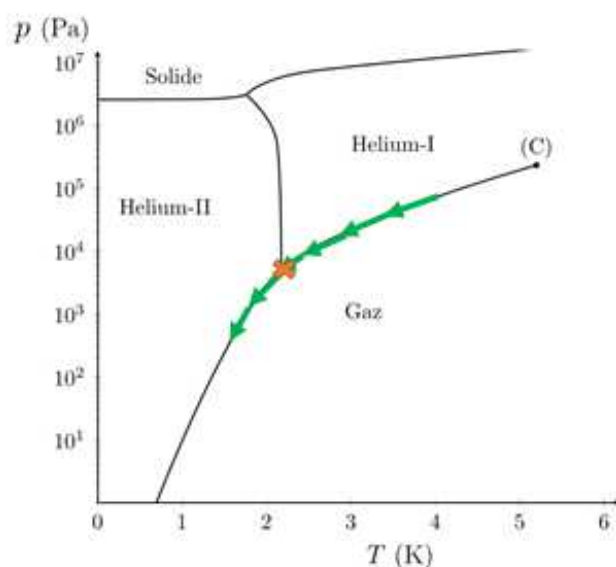
Q2 Le diagramme d'état (p,T) d'un corps pur est constitué de trois domaines (solide/liquide/vapeur, ci-dessous à gauche) dont les frontières ont des pentes généralement **positives** (l'eau est une exception, à droite, avec une courbe de coexistence solide/liquide qui admet une pente négative, tout au moins au-dessous d'une certaine pression).



Dans le cas de l'hélium, il faut prendre en compte un **point triple Hélium liquide II / Hélium liquide I / Gaz** et un point triple **Solide / Hélium liquide II / Hélium liquide I**. En d'autres termes, **il n'y a pas de point triple solide/liquide/gaz**.

Pour un corps pur « normal », lors d'un refroidissement le long de la ligne de coexistence avec la phase gazeuse, lorsque le point triple est franchi, on passe d'un équilibre **liquide / gaz** à un équilibre **solide / gaz**. On s'attend à une discontinuité de masse volumique de la phase condensée lors de ce franchissement.

Dans le cas de l'hélium, on passe d'un équilibre **hélium liquide I / gaz** à un équilibre **hélium liquide II / gaz**, sans que la phase solide n'apparaisse à l'équilibre avec la phase gazeuse. Par ailleurs, d'après la **figure 1-b**, la transition entre les deux phases de l'hélium liquide se produit **sans discontinuité de masse volumique**.



Q3 Le modèle de l'**écoulement parfait** consiste à négliger tout phénomène diffusif :

- diffusion de quantité de mouvement : on néglige la **viscosité** :
 - l'écoulement est ainsi régi par l'**équation d'Euler** ;
 - cette équation est complétée par des conditions aux limites qui imposent à la **composante normale de la vitesse** de s'annuler sur une paroi fixe (mais la composante tangentielle peut être non nulle) ;
 - autour d'un corps, un écoulement parfait a un **nombre de Reynolds qui tend vers l'infini** ;
- diffusion d'énergie cinétique microscopique : on néglige les échanges thermiques diffusifs :
 - l'évolution d'une particule de fluide est **adiabatique** ;
 - comme tout phénomène diffusif est négligé, l'évolution est aussi **réversible**, donc **isentropique** ;

Q4 Sous la température T_λ , d'après la **figure 1-b**, la masse volumique de l'hélium liquide est de l'ordre de :

$$\rho = 145 \text{ kg.m}^{-3}$$

En attribuant à chaque atome le volume a^3 :
$$a = \left(\frac{m_{\text{He}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Soit :
$$a \approx \left(\frac{7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,5 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{donc} \quad \boxed{a \approx 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$$

Un atome d'hélium d'énergie cinétique $E_c \approx 3k_B T$ est non relativiste et a une quantité de mouvement de norme :
$$p = \sqrt{2m_{\text{He}} E_c} \quad \text{soit} \quad p = \sqrt{6m_{\text{He}} k_B T}$$

On déduit de la **relation de de Broglie** la longueur d'onde de de Broglie de l'atome d'hélium :

$$\Lambda = \frac{h}{p} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Lambda = \frac{h}{\sqrt{6m_{\text{He}} k_B T}}}$$

Si la température diminue, la longueur d'onde de Broglie de l'atome d'hélium augmente, ce qui va dans le sens d'**effets quantiques plus prononcés** (au sens où les fonctions d'onde des différents atomes « se superposent »). Avec le critère retenu, les effets quantiques se manifestent à une température inférieure à :

$$\boxed{T_c = \frac{h^2}{6a^2 m_{\text{He}} k_B}}$$

$$\text{AN} \quad T_c = \frac{(7.10^{-34} \text{ J.s})^2}{6 \times (3.5.10^{-10} \text{ m})^2 \times (7.10^{-27} \text{ kg}) \times (1.4.10^{-23} \text{ J.K}^{-1})}$$

Soit :

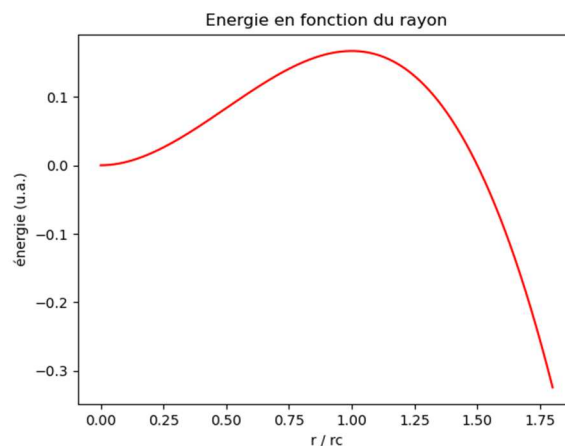
$$\boxed{T_c = 7 \text{ K}}$$

On retrouve un **ordre de grandeur** cohérent avec la température T_λ .

2 Etats métastables et cavitation

2.1 Métastabilité et cavitation

Q5 L'énergie surfacique de tension superficielle est γ et l'aire de l'interface entre les deux phases est celle d'une sphère, donc $4\pi r^2$, d'où le second terme. Ce terme est positif car une augmentation de l'aire de l'interface a un coût énergétique.



On déduit de l'expression de l'énergie :

$$\frac{d\Delta E}{dr} = 4\pi r^2 (p - p_{sat}) + 8\pi\gamma r \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta E}{dr^2} = 8\pi r (p - p_{sat}) + 8\pi\gamma$$

La dérivée première s'annule en $r = 0$, mais aussi en :

$$\boxed{r_c = \frac{2\gamma}{p_{sat} - p}}$$

La dérivée seconde y vaut : $\frac{d^2\Delta E}{dr^2}(r = r_c) = -8\pi\gamma < 0$ (alors qu'elle vaut $8\pi\gamma > 0$ en $r = 0$). Il s'agit donc bien d'un maximum en $r = r_c$.

A cette valeur du rayon :
$$\Delta E = 4\pi (p_{sat} - p) \left(-\frac{r_c^3}{3} + \frac{\gamma}{p_{sat} - p} r_c^2 \right)$$

Soit :
$$\Delta E = 4\pi \frac{2\gamma}{r_c} \left(-\frac{r_c^3}{3} + \frac{r_c^3}{2} \right)$$

Finalement :
$$\Delta E^* = \frac{4\pi}{3} \gamma r_c^2$$
 ou
$$\Delta E^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3(p_{sat} - p)^2}$$

L'**état métastable** correspond à $r = 0$ (absence de bulle de gaz) et il faut apporter (au moins) l'énergie ΔE^* pour franchir l'état (instable) $r = r_c$, à partir duquel il y a rupture de métastabilité.

Q6 Par analogie avec la **loi d'Arrhenius**, on peut proposer une probabilité de franchissement de la barrière d'énergie potentielle, donc de cavitation, de la forme :

$$\Gamma = \Gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$$

Une **distribution de Boltzmann** des fluctuations d'énergie ΔE permet de montrer que la probabilité $P(\Delta E > \Delta E^*)$ est effectivement proportionnelle à $\exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$.

Q7 A faible température, l'hélium liquide peut être très pur (introduction de cette partie), donc ΔE^* **est plus élevé**, ce qui implique, d'après **Q6**, que Γ est plus faible. Cet effet est renforcé par l'augmentation de $\frac{1}{T}$, lorsque T diminue, dans le facteur $\exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$.

Q8 Pour que la cavitation ait lieu entre t et $t+dt$ (probabilité $\Sigma(t+dt) - \Sigma(t)$), elle doit se produire pendant la durée dt (probabilité $\Gamma V dt$), alors qu'elle n'a pas eu lieu entre 0 et t (probabilité $1 - \Sigma(t)$). Ces deux « événements » étant indépendants :

$$\Sigma(t+dt) - \Sigma(t) = (1 - \Sigma(t)) \Gamma V dt$$

On en déduit :
$$\frac{d\Sigma}{1 - \Sigma} = \Gamma V dt$$

Cette équation s'intègre en :
$$-\ln \frac{1 - \Sigma(t)}{1 - \Sigma(0)} = \Gamma V t$$

On en déduit :
$$\Sigma(t) = 1 - \exp(-\Gamma V t)$$

Q9 La pression de cavitation est déduite de : $\Gamma V \tau = \ln 2$

$$\text{D'où : } \Gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right) V \tau = \ln 2$$

$$\text{Ainsi : } \Delta E^* = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V \tau}\right) \cdot k_B T$$

$$\text{Donc : } \frac{4\pi}{3} \gamma r_c^2 = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V \tau}\right) \cdot k_B T$$

$$\text{Soit : } \frac{16\pi}{3} \frac{\gamma^3}{(p_{sat} - p_c)^2} = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V \tau}\right) \cdot k_B T$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{p_c = p_{sat} - \sqrt{\frac{16\pi\gamma^3}{3k_B T \ln\left(\frac{\Gamma_0 V \tau}{\ln 2}\right)}}$$

Si la température diminue, cette pression peut s'annuler et devenir **négative**.

A une température tendant vers 0, la pression précédente tendrait vers $-\infty$.

Pour maximiser $|p_c|$ avec $p_c < 0$, il faut choisir un **petit volume** et une durée τ faible.

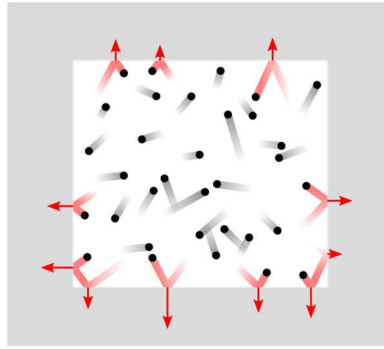
2.2 Pression négative

Q10 La pression exercée par un gaz parfait sur une paroi peut s'interpréter en termes de **transfert de quantité de mouvement** au cours de chocs molécules / paroi. Dans le cadre d'un modèle très simplifié, la vitesse d'une molécule appartient à $\{-u\vec{e}_x, u\vec{e}_x, -u\vec{e}_y, u\vec{e}_y, -u\vec{e}_z, u\vec{e}_z\}$, ces six valeurs étant équiprobables. On note n la densité volumique de molécules e masse m . En considérant que la normale à la paroi (orientée du gaz vers la paroi) est \vec{e}_z , la quantité de mouvement cédée pendant la durée dt par les molécules à un élément de paroi d'aire dS est :

$$-\frac{1}{6} n dS u dt (-m u \vec{e}_z - (m u \vec{e}_z)) = \frac{1}{3} n m u^2 dS dt \vec{e}_z$$

Ce transfert de quantité de mouvement est associé à une force $\frac{1}{3} n m u^2 dS \vec{e}_z = \frac{1}{3} n m u^2 \overline{dS}$ exercée sur la paroi.

On en déduit la **pression cinétique** : $\boxed{P = \frac{1}{3} n m u^2}$ toujours positive.



Q11 A basse température, l'énergie d'agitation thermique est faible et elle peut être dominée (en valeur absolue) par l'**énergie d'interaction attractive** entre molécules.

Dans l'équation d'état du **gaz de Van der Waals**, la contribution des interactions attractives apparaît dans le terme de « pression interne » $-a \frac{N^2}{V^2}$:

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2}$$

La pression (totale) devient donc négative à une température inférieure à :

$$T^* = \frac{a}{k_B} \frac{N}{V^2} (V - Nb)$$

Q12 En supposant la sève incompressible, la pression est donnée par la **loi de Pascal**, soit en fonction de l'altitude z :

$$p(z) = p_0 - \rho g z$$

Elle devient négative au-delà de :

$$z_c = \frac{p_0}{\rho g}$$

AN

$$z_c = 10m$$

Il existe des arbres de plus grande hauteur et une pression négative est donc envisageable.