

Préparation aux Olympiades Internationales de Physique Compléments de cours CPGE

Cours de mécanique des fluides



OLYMPIADES INTERNATIONALES
DE PHYSIQUE - IPHO



Julien Courteaud
Lycée Blaise Pascal - Rouen

Année 2017-18

Contents

1	Quelques notions de mécanique des fluides	3
1.1	Rudiments de statique des fluides	3
1.1.1	Echelle mésoscopique et particule de fluide	3
1.1.2	Champ de forces dans un fluide au repos	4
1.1.3	Equation fondamentale de la statique des fluides	4
1.1.4	Evolution de la pression dans un liquide (incompressible)	5
1.1.4.1	Calcul de la pression en fonction de la profondeur	5
1.1.4.2	Quelques applications	6
1.1.5	Evolution de la pression dans l'atmosphère isotherme (hors programme IPhOs)	7
1.1.6	La poussée d'Archimède	8
1.2	Etude des fluides en mouvement : vers la relation de Bernoulli et ses applications	9
1.2.1	Description lagrangienne, eulérienne et champ de vitesse	9
1.2.2	Caractérisation d'un écoulement et hypothèses	9
1.2.2.1	Ecoulement permanent (ou stationnaire)	10
1.2.2.2	Ecoulement incompressible	10
1.2.2.3	Ecoulement irrotationnel	10
1.2.2.4	Notion de viscosité et écoulement parfait	10
1.2.3	Débits et lois de conservation	11
1.2.3.1	Débit volumique	11
1.2.3.2	Débit massique	11
1.2.3.3	Conservation du débit	11
1.2.4	Equation de Bernoulli	12
1.2.5	Quelques applications (très) classiques	12
1.2.5.1	L'effet Venturi	13
1.2.5.2	Le tube de Pitot	13
1.2.5.3	La vidange d'un réservoir : formule de Torricelli	15
1.3	Quelques exercices d'application	17
1.3.1	Statique des fluides	17
1.3.1.1	Liquides non miscibles en équilibre	17
1.3.2	Poussée d'Archimède	17
1.3.2.1	Mesure de la vitesse de gouttes de pluie	17
1.3.2.2	Mesure d'un coefficient de viscosité	18
1.3.3	Equation de Bernoulli	19
1.3.3.1	Encore le réservoir de Torricelli...	19
1.3.3.2	Débit et puissance à la sortie d'une conduite barrage-turbine. Phénomène de cavitation	20
1.3.4	Quelques annales des QCM des IPhOs...	21
1.3.4.1	Tubes en U (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)	21
1.3.4.2	Masse volumique d'une huile (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)	21
1.3.4.3	Encore un vase... (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)	21
1.3.4.4	...Et des tubes (d'après QCM IPhOs CPGE 2016)	22
1.3.4.5	Filet d'eau d'un robinet (d'après QCM IPhOs CPGE 2016)	22
1.3.4.6	Objet flottant (d'après QCM IPhOs CPGE 2017)	23

1.3.4.7	La chute de la tasse (d'après QCM IPhOs CPGE 2017)	23
1.3.5	La fontaine de Héron (d'après Problème IPhOs 2017)	24
2	Tension superficielle et capillarité dans un liquide	28
2.1	Introduction à la tension superficielle	28
2.1.1	Généralités et importance du phénomène	28
2.1.2	Origine microscopique de la tension superficielle	29
2.2	Modélisation et lois macroscopiques	30
2.2.1	Travail et force de tension superficielle	30
2.2.1.1	Une première approche qualitative : le pourquoi de la goutte d'eau...	30
2.2.1.2	Travail et variation de surface	30
2.2.1.3	Expression de la force de tension superficielle	31
2.2.2	Loi de Laplace	31
2.2.2.1	Cas d'une bulle sphérique	31
2.2.2.2	Généralisation	32
2.2.2.3	Application au cas d'une bulle de savon	32
2.2.2.4	Une application en biologie : la respiration chez les êtres vivants	33
2.2.3	Mouillabilité et angle de contact	33
2.2.3.1	Quelques observations habituelles	33
2.2.3.2	Une première interprétation	34
2.2.3.3	Modélisation	34
2.2.4	Capillarité et loi de Jurin	35
2.3	Quelques exercices	37
2.3.1	Montée d'un liquide dans un capillaire (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)	37
2.3.2	Quelques exercices d'application	37
2.3.3	Capillarité	38
2.3.4	Capillarité et température	38
2.3.5	Montée entre deux plaques	39
2.3.6	Rupture d'un film	39
2.3.7	La lentille liquide (d'après Exercice IPhOs CPGE 2015)	40

Chapter 1

Quelques notions de mécanique des fluides

L'objectif de ce cours est de se doter de quelques notions permettant de caractériser les **fluides en écoulement**. En particulier, la **relation de Bernoulli**, traduisant le bilan énergétique du système fluide, permet de multiples applications que nous allons rencontrer dans ce chapitre.

Au préalable, nous avons besoin d'outils permettant de caractériser le fluide au repos, avant d'envisager l'étude de sa mise en mouvement : c'est le cas de la **statique des fluides**.

1.1 Rudiments de statique des fluides

L'objectif est ici de déterminer la **distribution de pression dans un fluide au repos** et soumis à un champ de pesanteur uniforme. Nous étudierons l'exemple des liquides et des gaz.

Rappelons qu'un fluide est dit au repos s'il n'y a pas de mouvement d'ensemble de celui-ci. Par ailleurs, un fluide est un **milieu continu** (cf la définition d'une phase...)

1.1.1 Echelle mésoscopique et particule de fluide

Nous connaissons déjà deux échelles caractéristiques :

- **L'échelle macroscopique**, notre échelle, où l'on ne voit pas la réalité atomique et à laquelle la matière apparaît donc continue. Les systèmes ont alors une dimension étendue.
- **L'échelle microscopique**, qui consiste à travailler à l'échelle de l'atome, et à laquelle la matière apparaît donc discontinue. Ordre de grandeur : $10^{-10} m$

Quand on s'intéresse à des systèmes fluides, il est d'usage de considérer **l'échelle dite mésoscopique**, qui est une échelle intermédiaire :

$$\boxed{\text{échelle microscopique} \ll \text{échelle mésoscopique} \ll \text{échelle macroscopique}}$$

L'échelle mésoscopique est donc "grande" à l'échelle microscopique, mais "petite" à l'échelle macroscopique. Concrètement cela signifie que :

- Le système est suffisamment petit pour être considéré ponctuel (à l'échelle macroscopique)
- Le système est suffisamment grand (à l'échelle microscopique) pour contenir un nombre important de molécules et apparaître continu. Cela signifie que les grandeurs macroscopiques (masse volumique, pression,...) peuvent être définies.

En pratique, l'ordre de grandeur de l'échelle mésoscopique est $0,1\mu m$.

On définit également la **particule de fluide**, qui est un élément de volume fermé de fluide à l'échelle mésoscopique.

1.1.2 Champ de forces dans un fluide au repos

Considérons ici un fluide au repos. Isolons un système de volume V délimité par une surface S .

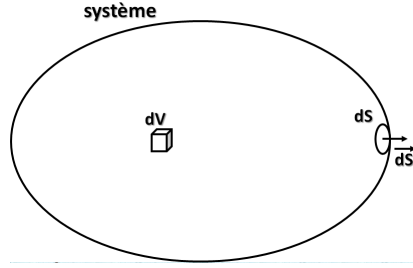


Figure 1.1.1: système et éléments de surface/volume

Deux types de forces peuvent s'appliquer sur et au sein du fluide. On distingue :

- **Les forces volumiques :**

Soit dV un élément de volume élémentaire du système. On appelle force volumique une force élémentaire $\vec{dF}_v$ proportionnelle à l'élément de volume dV . On peut alors écrire $\vec{dF}_v = \vec{f}_v \cdot dV$ où $\vec{f}_v$ est la densité volumique de force.

→ Le poids est un exemple de force volumique. En effet, pour l'élément de volume dV , le poids est :

$$\vec{dP} = dm \cdot \vec{g} = \rho \vec{g} \cdot dV \text{ où } \rho \text{ est la masse volumique de l'élément de fluide.}$$

- **Les forces surfaciques :**

On considère cette fois un élément de surface $\vec{dS}$, orienté selon la normale extérieure. On appelle force surfacique une force élémentaire $\vec{dF}_s$ proportionnelle à l'élément de volume dS . On peut alors écrire $\vec{dF}_s = \vec{f}_s \cdot dS$ où $\vec{f}_s$ est la densité surfacique de force.

→ La pression est un exemple de force surfacique. On rappelle que, par définition, la force de pression exercée par le milieu extérieur sur l'élément de surface dS est :

$$\vec{dF}_{\text{extérieur} \rightarrow \text{paroi}} = -P \cdot \vec{dS} \text{ où } P \text{ est la pression au niveau de cette surface.}$$

1.1.3 Equation fondamentale de la statique des fluides

On considère ici un **fluide à l'équilibre** (liquide ou gazeux). Le système étudié sera une **particule de fluide**. Nous allons lui appliquer les lois de la dynamique pour établir **l'équation fondamentale de la statique des fluides** qui caractérise la variation locale de pression en fonction des paramètres du système.

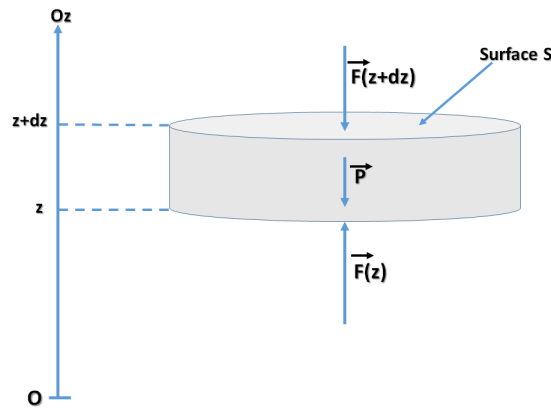


Figure 1.1.2: Particule de fluide étudiée

- Système : particule de fluide, de volume élémentaire $dV = S.dz$, de masse dm , comprise entre les altitudes z et $z + dz$, où l'axe Oz est l'axe vertical orienté vers le haut.
- Référentiel : terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Poids : } \vec{P} = -dm.g.\vec{e}_z \\ \text{Pression sur la face supérieure : } \vec{F}_p(z + dz) = -P(z + dz).S\vec{e}_z \\ \text{Pression sur la face inférieure : } \vec{F}_p(z) = +P(z).S\vec{e}_z \\ \text{Les actions de pression sur les surfaces latérales se compensent, du fait de la symétrie de la géométrie.} \end{array} \right.$$

- Appliquons alors le principe fondamental de la dynamique, à l'équilibre, à la particule de fluide, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_p(z + dz) + \vec{F}_p(z)$$

soit :

$$\vec{0} = -dm.g.\vec{e}_z - P(z + dz).S\vec{e}_z + P(z).S\vec{e}_z$$

En projetant sur Oz il vient :

$$dm.g = -[P(z + dz) - P(z)].S$$

Par ailleurs, comme dz est infinitésimal, $\frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} \approx \frac{dP}{dz}$, d'où :

$$\frac{dm}{dz}.g = -\frac{dP}{dz}.S$$

Or, par définition de la masse volumique ρ : $\rho V = dm = \rho.S.dz$. Ainsi :

$$\rho S g = -\frac{dP}{dz}.S$$

On obtient ainsi **l'équation fondamentale de la statique des fluides** :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g \text{ ou } dP = -\rho g dz} \text{ où l'axe Oz est orienté selon la } \mathbf{verticale ascendante}.$$

Remarque : si l'axe Oz est orienté selon la **verticale descendante**, z est changé en $-z$ et : $\boxed{\frac{dP}{dz} = +\rho g}$

Cette équation est fondamentale et s'applique à tous les fluides (liquides ou gazeux). Nous allons cependant voir que, lorsqu'on calcule l'évolution de la pression en fonction de l'altitude (ou de la profondeur), les cas liquide et gazeux sont très différents.

1.1.4 Evolution de la pression dans un liquide (incompressible)

1.1.4.1 Calcul de la pression en fonction de la profondeur

Nous allons en plus supposer ici que le fluide est un **liquide** et considérer ce **liquide incompressible** (hypothèse assez bien vérifiée en première approximation). La masse volumique est donc constante :

$$\rho = \text{cte}$$

L'objectif est ici de déterminer l'évolution de la pression en fonction de la profondeur, dans l'océan par exemple. On oriente ici l'axe Oz vers le bas et on suppose connue la pression atmosphérique P_0 au niveau de la surface.

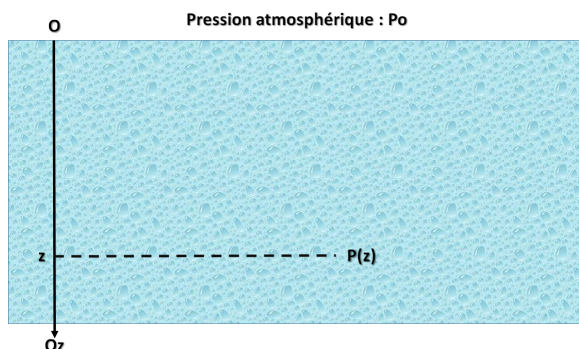


Figure 1.1.3: Evolution de la pression dans un liquide incompressible

Reprenons l'équation fondamentale vue précédemment :

$$dP = \rho g dz$$

et intégrons la entre la surface ($z = 0$) et la profondeur z :

$$\int_0^z dP = \int_0^z \rho g dz$$

g et ρ étant des constantes, il vient :

$$[P(z)]_0^z = \rho g [z]_0^z$$

Soit :

$$P(z) - P_0 = \rho g z$$

On en déduit ainsi la loi essentielle donnant l'évolution de la pression en fonction de la profondeur dans un liquide incompressible :

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g z}$$

où z est la profondeur dans le liquide, ρ la masse volumique du liquide et P_0 la pression au niveau de la surface.

1.1.4.2 Quelques applications

Une application rapide : Quelle est la pression à 10m de profondeur dans l'eau?



La pression atmosphérique est $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ en surface.

La masse volumique de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $z = 10 \text{ m}$. Ainsi : $\rho g z = 10^5 \text{ Pa}$.

La pression à 10m est donc de 2 bars.

Plus généralement, on retient que la pression dans l'eau **augmente de 1 bar tous les 10m**.

Et une application pratique : le manomètre

Un manomètre est un dispositif permettant des mesures de pression. Il peut être constitué de la façon suivante

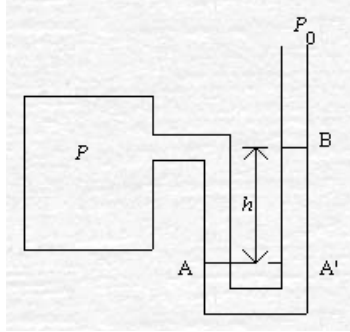


Figure 1.1.4: Principe du manomètre à mercure

L'enceinte de gauche contient un gaz à une pression P que l'on cherche à déterminer. On connecte le manomètre (tube de droite) dont :

- une des extrémités est connectée à l'enceinte : la pression P s'exerce donc au niveau du point A : $P_A = P$
- l'autre extrémité est au contact de l'atmosphère : pression P_0 . On retrouve donc cette pression en B : $P_B = P_0$
- Entre A et B se trouve un fluide (souvent du mercure), de masse volumique ρ connue.

La formule donnant l'évolution de la pression en fonction de la profondeur permet d'affirmer que :

$$P_A = P_{A'} \text{ et } P_{A'} = P_0 + \rho g h$$

Ainsi on en déduit :

$$P = P_0 + \rho g h$$

En connaissant la pression de référence P_0 et en mesurant la différence d'altitude h on en déduit bien la valeur de la pression P .

1.1.5 Evolution de la pression dans l'atmosphère isotherme (hors programme IPhOs)

Calcul de la loi d'évolution de pression :

Supposons ici non plus un liquide mais un **fluide gazeux**. Là aussi, on cherche à déterminer l'évolution de la pression en fonction de l'altitude. L'hypothèse d'incompressibilité n'aurait ici évidemment aucun sens. Nous allons donc faire une autre hypothèse : **on suppose le gaz parfait**. De plus, on appelle P_0 la pression au niveau du sol ($z = 0$).

On peut alors utiliser l'équation d'état des gaz parfaits : $PV = nRT$, qui s'écrit également :

$$P = \frac{n}{V}RT = \frac{m}{MV}RT = \frac{\rho RT}{M}$$

On en déduit donc l'expression de la masse volumique (à retenir) :

$$\boxed{\rho = \frac{MP}{RT}} \text{ pour un gaz parfait}$$

Utilisons alors l'équation fondamentale de la statique des fluides (avec l'axe Oz orienté vers le haut) :

$$dP = -\rho g dz$$

En réinjectant l'expression de la masse volumique trouvée, on obtient :

$$dP = -\frac{MP}{RT} g dz$$

On en déduit donc :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

On peut alors intégrer entre $z = 0$ et z :

$$\int_0^z \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{Mg}{RT} dz$$

En supposant l'**atmosphère isotherme**, on peut alors en déduire :

$$[\ln P(z)]_0^z = -\frac{Mg}{RT} [z]_0^z, \text{ soit : } \ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mg}{RT} z$$

On en déduit donc finalement l'évolution de la pression atmosphérique (isotherme) en fonction de l'altitude :

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

Une rapide application... : Quelle est la pression en haut du Mont Blanc?



La masse molaire de l'air est de 29 g/mol, l'altitude du Mont Blanc est de 4807m. Supposons une température de 15°C, soit 288K.

On obtient ainsi, en haut du Mont Blanc :

$$P = 0,56 \text{ bar}$$

Il y a donc "deux fois moins" de dioxygène au sommet du Mont Blanc qu'en bord de mer...

1.1.6 La poussée d'Archimède

On considère ici un système solide immergé dans un fluide. Chaque élément de surface $d\vec{S}$ de ce solide va ainsi subir, de la part du fluide, une action de pression : $d\vec{F}_P = -P.d\vec{S}$

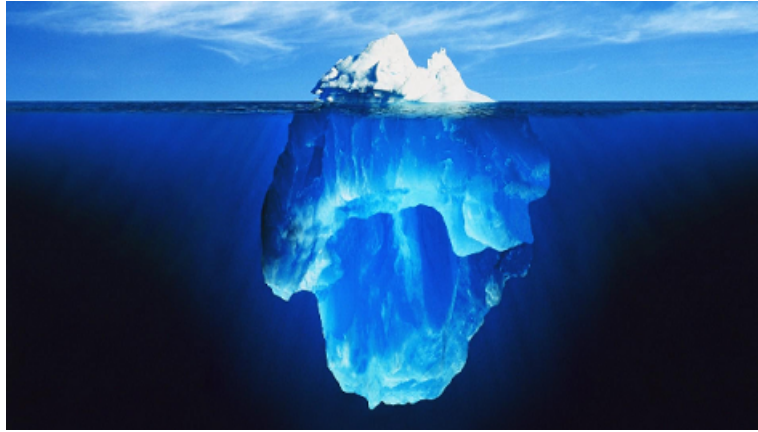
La résultante des forces de pression est donc la somme de chacune de ces contributions. Le système étant continu, la somme est une intégrale :

$$\vec{\Pi}_A = \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{système}} = \iint_{\text{système}} -P(M).d\vec{S}$$

Cette force est appelée **poussée d'Archimède**. On admet par ailleurs le théorème d'Archimède (qui se déduirait directement du calcul de cette poussée d'Archimède) :

A l'équilibre, la force exercée par le fluide sur un solide immergé (c'est à dire la poussée d'Archimède) est égale à l'opposée du poids du fluide déplacé.

- Exemple d'application : la face cachée de l'iceberg...



On considère un iceberg cubique de côté a . Déterminer que l'on voit 8% de l'iceberg (les 92% restants étant sous la surface de l'eau).

données : masses volumiques de l'eau liquide : $\rho_L = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, de la glace : $\rho_G = 0,92.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1.2 Etude des fluides en mouvement : vers la relation de Bernoulli et ses applications

Dans cette partie nous allons cette fois supposer que le fluide est en mouvement et non plus au repos. Voyons dans un premier temps quels outils vont nous permettre d'étudier ce mouvement. Nous verrons ensuite une application fondamentale : la **relation de Bernoulli**, ainsi que certaines de ses (très nombreuses) applications.

1.2.1 Description lagrangienne, eulérienne et champ de vitesse

Assez naturellement, il va exister deux façons antagonistes de décrire un écoulement de fluide. Chaque description a ses avantages et ses inconvénients. Les deux descriptions sont donc complémentaires :

- **La description dite de Lagrange :**

Elle consiste à suivre au cours du temps une particule de fluide donnée. On considère alors un système fermé dont on suit l'évolution spatio-temporelle.

→ Cette description est très utile si on s'intéresse à la **trajectoire d'une particule de fluide**.

- **La description dite d'Euler :**

Elle consiste à se placer en un point M donné et fixé. On considère alors un système ouvert puisque, du fait de l'écoulement du fluide, ce n'est jamais la même particule de fluide qui se trouve au niveau du point M.

→ Cette description est très utile si l'on cherche à dresser la **“carte” des différents champs** : champ de pression, de masse volumique, de vitesse,..., c'est à dire faire une “photographie” du fluide à un instant donné et voir les évolutions spatiales des différentes grandeurs caractérisant le fluide.

- Le champ de vitesse est ainsi la connaissance du vecteur vitesse de chaque particule de fluide, en tout point de l'espace et à chaque instant : $\vec{v}(x, y, z, t)$
- On définit de même le champ de pression : $P(x, y, z, t)$ et le champ de masse volumique : $\rho(x, y, z, t)$.

1.2.2 Caractérisation d'un écoulement et hypothèses

L'étude d'un fluide en mouvement est un problème extrêmement complexe. La non-linéarité des équations impose une résolution numérique (comme nous le verrons un petit peu plus tard dans le cours de mécanique). Cependant, sous certaines hypothèses, cette étude devient accessible analytiquement. Nous allons voir ici les différentes hypothèses que nous pourrions être amenés à faire pour simplifier l'étude... Ainsi que leur validité, bien entendu.

1.2.2.1 Écoulement permanent (ou stationnaire)

Un écoulement sera dit **permanent** si les champs (de vitesse, de pression, de masse volumique,...) ne dépendent pas du temps. On a alors :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t_0)$$

Attention : on remarque donc que ces grandeurs dépendent a priori de la position... Les trajectoires des particules resteront alors inchangées au cours du temps.

1.2.2.2 Écoulement incompressible

Un écoulement est dit **incompressible** si les particules de fluide conservent leur masse volumique constante au cours du temps. On aura alors, de façon évidente :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

On remarque que la masse volumique ne dépend alors ni de la position, ni du temps.

1.2.2.3 Écoulement irrotationnel

La notion d'irrotationnalité d'un écoulement est plus délicate à définir mathématiquement. Nous nous contenterons d'admettre que le caractère rotationnel d'un écoulement est lié au mouvement local de rotation à l'intérieur du fluide (rotations d'ensemble du fluide, présence de tourbillons,...)

Un écoulement sera donc **irrotationnel** s'il ne possède pas de rotation locale.

1.2.2.4 Notion de viscosité et écoulement parfait

La viscosité caractérise les interactions de type frottement au sein du fluide.

- Il existe ainsi deux types d'interactions entre particules de fluide :
 - Les actions de pression exercées par une particule de fluide sur la particule de fluide voisine.
 - Les actions de viscosité qui sont un effet dynamique.

Supposons par exemple un écoulement “en couches” : Une couche de fluide se déplace rapidement sur une couche de fluide initialement au repos. La couche au repos va être mise en mouvement du fait de son contact avec la couche rapide. Ce phénomène est appelé le cisaillement et est dû aux interactions visqueuses au sein du fluide.

Si on peut négliger cette viscosité, l'écoulement sera dit **parfait**.

Quelques exemples :

- Si on reprend l'exemple précédent en supposant l'écoulement parfait, la couche au repos le restera.
- Considérons la situation ci-après :

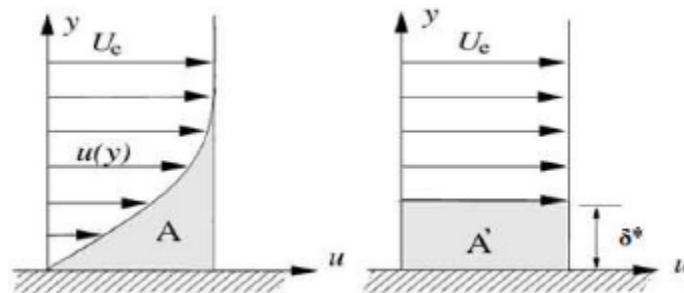


Figure 1.2.1: écoulement permanent visqueux (à gauche) et parfait (à droite)

- La situation de gauche présente un **écoulement visqueux** : la paroi impose une vitesse nulle au niveau du contact (par viscosité) et la vitesse du fluide augmente ensuite avec y du fait de l'entraînement, par cisaillement, du fluide des couches supérieures.
- La situation de droite représente un **écoulement parfait** : il n'y a pas de contrainte de cisaillement imposée par la paroi, l'écoulement est donc uniforme.

On peut par ailleurs préciser que le frottement visqueux vu en mécanique est une conséquence directe de la viscosité du fluide (air ou eau). En effet, ce sont les mêmes contraintes de viscosité entre le fluide et le système qui entraînent la diminution de vitesse de celui-ci.

1.2.3 Débits et lois de conservation

1.2.3.1 Débit volumique

Considérons la situation suivante, à savoir un fluide en écoulement dans une conduite cylindrique :



Figure 1.2.2: écoulement dans une conduite cylindrique

Notons S_A la section de la conduite, perpendiculaire à l'écoulement, au niveau du point A. On peut alors définir le débit volumique en A, $D_V(A)$ par :

$$D_V(A) = \iint_{S_A} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad \text{où } M \text{ est un point de la surface } S_A.$$

- Unités : Ce débit volumique s'exprime donc en $m^3.s^{-1}$
- Cas d'un écoulement permanent parfait : la vitesse aura alors même valeur en tout point de S_A et sera perpendiculaire à cette surface. Le débit volumique s'écrit alors simplement :

$$D_V = v_A \cdot S_A \quad \text{pour un écoulement permanent parfait}$$

1.2.3.2 Débit massique

Etudions la même situation que précédemment. On peut alors définir le débit massique en A, $D_m(A)$ par :

$$D_m(A) = \iint_{S_A} \rho(M) \cdot \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad \text{où } M \text{ est un point de la surface } S_A.$$

- Unités : Ce débit volumique s'exprime donc en $kg.s^{-1}$
- Cas d'un écoulement permanent parfait pour un fluide incompressible : la vitesse aura alors même valeur en tout point de S_A et sera perpendiculaire à cette surface. De plus la masse volumique sera également constante. Le débit volumique s'écrit alors simplement :

$$D_m = \rho_A v_A S_A \quad \text{pour un écoulement permanent parfait d'un fluide incompressible}$$

1.2.3.3 Conservation du débit

Considérons ici un **écoulement permanent**. Il y aura donc conservation du débit massique (sinon il y aurait une accumulation progressive de masse et on ne serait donc pas en régime permanent...) :

$$D_m = cte = \rho S v \quad \text{pour un écoulement permanent}$$

- Application au cas précédent :

Considérons la conduite vue précédemment. La conservation du débit s'écrit alors :

$$\rho_A v_A S_A = \rho_B v_B S_B$$

Supposons par ailleurs un fluide incompressible, c'est à dire tel que $\rho_A = \rho_B$. On obtient alors :

$$v_A S_A = v_B S_B$$

Physiquement, cela signifie que les étranglements (faible section) correspondent à des zones de grandes vitesses. Nous y reviendrons quand nous évoquerons l'effet Venturi.

1.2.4 Equation de Bernoulli

Les relations de Bernoulli sont fondamentales en mécanique des fluides. Elles traduisent la conservation de l'énergie dans le fluide et permettent d'expliquer simplement de très nombreux phénomènes. Leur démonstration n'est cependant pas accessible pour le moment. Nous nous contenterons donc de les admettre, avant d'étudier certaines de leurs nombreuses applications. Cette équation n'est valable que sous certaines hypothèses. Nous supposerons donc ici :

Hypothèses :

- L'écoulement est parfait (donc non visqueux)
- L'écoulement est irrotationnel (absence de rotation locale du fluide)
- L'écoulement est stationnaire (donc indépendant du temps). En pratique, les écoulements faiblement variables pourront être considérés comme stationnaires.
- Le fluide est incompressible (masse volumique $\rho = cte$)
- Le fluide est homogène (même composition partout)

On admet alors l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{v_M^2}{2} + gz_M + \frac{P_M}{\rho_M} = cte \text{ quel que soit le point M du fluide, à un instant t donné}}$$

$$\text{où : } \begin{cases} v_M \text{ est la vitesse de la particule de fluide au niveau du point M,} \\ z_M \text{ est l'altitude du point M,} \\ P_M \text{ est la pression au niveau du point M,} \\ \rho_M \text{ est la masse volumique au niveau du point M.} \end{cases}$$

Physiquement :

- Le premier terme représente l'**énergie cinétique** massique du fluide.
- Le deuxième terme représente l'**énergie potentielle de pesanteur**.
- Le troisième terme représente l'**énergie associée aux forces de pression**.

1.2.5 Quelques applications (très) classiques

Nous allons voir ici quelques applications directes de l'équation de Bernoulli. Nous en verrons d'autres en exercices. Dans toute cette partie on suppose les hypothèses précédentes vérifiées afin de pouvoir appliquer la forme vue de l'équation de Bernoulli : le fluide est **homogène** et **incompressible**; l'écoulement est **parfait**, **irrotationnel** et **permanent**.

1.2.5.1 L'effet Venturi

Considérons ici une conduite dans laquelle s'écoule un fluide. Cette conduite présente un étranglement au niveau du point B :



Figure 1.2.3: Conduite et étranglement : l'effet Venturi

- Nous avons déjà mentionné que la conservation du débit impose (car l'écoulement est permanent) :

$$S_A v_A = S_B v_B$$

On retient ainsi que **les zones d'étranglement correspondent à des zones de vitesses maximales**. Ce phénomène a de nombreuses manifestations : Valence est une ville très ventée (du fait de la présence du massif du Vercors à l'est, du plateau ardéchois à l'ouest). Les rues de New York sont également très ventées...

- De plus, on peut appliquer l'équation de Bernoulli, entre le point A et le point B :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho_A} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\rho_B}$$

On constate de plus que l'altitude est la même en A et en B, ainsi que la masse volumique (le fluide étant incompressible) ce qui induit la simplification :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho}$$

On vient de voir que la vitesse en A est inférieure à celle en B, on en déduit donc :

$$P_A > P_B$$

Ainsi, les étranglements sont marqués par :

- de fortes valeurs de vitesses
- de faibles valeurs de pression

Ces résultats constituent ce que l'on appelle l'**effet Venturi**.

1.2.5.2 Le tube de Pitot

Le tube de Pitot est un dispositif utilisé dans l'aéronautique pour mesurer :

- la vitesse d'un écoulement, si le tube de Pitot est fixe dans un fluide en mouvement
- la vitesse d'un aéronef, si le tube de Pitot est embarqué dans celui-ci et que le fluide est au repos
- la vitesse relative d'un aéronef, si le tube de Pitot est embarqué dans celui-ci et que le fluide est en mouvement.



Figure 1.2.4: Sondes de Pitot sur un Airbus A380

Le tube de Pitot est constitué de la façon suivante :

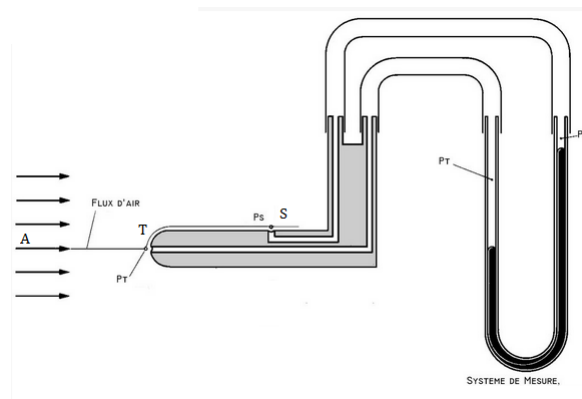


Figure 1.2.5: Principe du tube de Pitot

- Un tube fin, métallique, possède une extrémité arrondie et percée d'un trou très fin de centre T
- Le tube est également percé sur sa partie latérale, d'un trou très fin au niveau du point S.
- Ce tube est placé longitudinalement dans un écoulement unidimensionnel horizontal uniforme de vitesse $\vec{v}_0$ et de pression P_0
- Le point A est situé "loin" en amont du tube de Pitot. On peut donc considérer que $v_A = v_0$ et $P_A = P_0$ (le tube n'a pas d'influence à grande distance).
- Le manomètre situé en aval est relié aux deux tubes et permet de mesurer la différence de pression entre ceux-ci.

Appliquons alors les équations de Bernoulli :

- Entre le point A et le point T : calcul de P_T

La formule de Bernoulli donne alors :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho_A} = \frac{v_T^2}{2} + gz_T + \frac{P_T}{\rho_T}$$

Or on sait que le fluide est incompressible : $\rho_A = \rho_T = \rho$ et l'écoulement horizontal : $z_A = z_T$. Par ailleurs, T est un point d'arrêt : le fluide "bute" sur le tube. On en déduit donc que la vitesse y est nulle : $v_T = 0$.

On en déduit donc :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{P_T}{\rho}$$

Soit :

$$P_T = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2}$$

- Entre le point A et le point S : calcul de P_S

La formule de Bernoulli donne alors :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho_A} = \frac{v_S^2}{2} + gz_S + \frac{P_S}{\rho_S}$$

Or on sait que le fluide est incompressible : $\rho_A = \rho_S = \rho$. De plus, on peut négliger la variation d'altitude, le tube étant très fin : $z_A \approx z_S$. Enfin, la conservation du débit (sur une tranche perpendiculaire à l'écoulement) impose $v_S \approx v_0$; en effet, on peut négliger la section du tube devant celle de l'écoulement..

On en déduit donc :

$$P_S \approx P_0$$

- On en déduit donc :

$$P_T - P_S \approx \rho \frac{v_0^2}{2}$$

La mesure de la différence de pression $P_T - P_S$ permet donc bien de déterminer la vitesse v_0 .

1.2.5.3 La vidange d'un réservoir : formule de Torricelli

Considérons le réservoir suivant, dit de Torricelli :

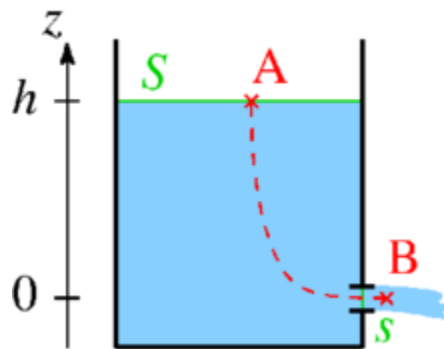


Figure 1.2.6: Réservoir de Torricelli

L'objectif est ici de démontrer le théorème de Torricelli, qui donne la loi de l'évolution de la vitesse de l'écoulement en sortie du réservoir en fonction de la hauteur h . Intuitivement, on imagine bien que celle-ci va augmenter avec h . Démonstrons le, et obtenons la loi d'évolution de la vitesse.

Modélisation

- On note S et s les sections respectives du réservoir et du tube de sortie. On suppose par ailleurs : $S \gg s$.
- On supposera l'écoulement quasi-stationnaire, c'est à dire évoluant suffisamment lentement pour pouvoir appliquer l'équation de Bernoulli à chaque instant (penser au parallèle avec l'ARQS en électronique.).
- On suppose que la vitesse en A est portée par la verticale descendante et que l'écoulement en B est porté par la direction horizontale (hypothèse d'unidimensionnalité locale de l'écoulement)
- On note P_0 la pression atmosphérique qui s'applique au niveau de la surface supérieure du liquide (point A), ainsi qu'au niveau de la sortie (point B : écoulement à l'air libre).
- On note h la différence d'altitude entre A et B et ρ la masse volumique (constante) du fluide.

Etablissement de la formule de Torricelli Sous ces hypothèses, on peut appliquer l'équation de Bernoulli entre le point A et le point B, à chaque instant t :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho_B} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\rho_B}$$

Or on sait que :

- La pression est la même en A et en B : $P_A = P_B = P_0$
- La vitesse en A est négligeable devant celle en B. En effet, la conservation du débit volumique impose : $v_A S = v_B s$. Or, comme $S \gg s$, on en déduit : $v_A \ll v_B$.

On obtient ainsi la forme simplifiée :

$$gz_A = \frac{v_B^2}{2} + gz_B$$

Qui s'écrit encore : $g(z_A - z_B) = \frac{v_B^2}{2}$

Comme $h = z_A - z_B$, il vient :

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Ce résultat constitue le **théorème de Torricelli**.

Bien évidemment, la hauteur de liquide h va diminuer au cours du temps, donc sa vitesse également. Nous verrons un exercice permettant de calculer l'évolution de la hauteur de fluide en fonction du temps.

1.3 Quelques exercices d'application

1.3.1 Statique des fluides

1.3.1.1 Liquides non miscibles en équilibre

Deux récipients A et B, de sections respectives $S_1 = S$ et $S_2 = 2S$, sont reliés par un tube (de section négligeable) comportant un robinet R. Les bases de A et B sont situées sur un même plan horizontal.

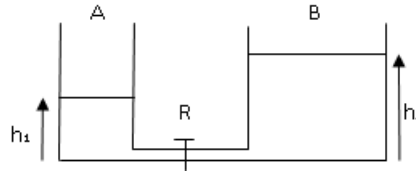


Figure 1.3.1: Schéma de l'expérience

1. Le robinet R est fermé. On verse du mercure, de masse volumique μ , jusqu'à une hauteur $h_1 = h$ dans A. Du mercure est également versé dans B jusqu'à la hauteur $h_2 = 3h/2$. Le mercure est considéré comme un fluide homogène incompressible. Exprimer en fonction de h les déplacements algébriques x_1 et x_2 des surfaces libres de A et B après avoir ouvert le robinet R.
2. Une hauteur h' d'eau, de masse volumique μ_0 , est ensuite versée dans A. L'eau et le mercure sont deux liquides non miscibles. A l'équilibre, il existe une dénivellation D entre les surfaces libres de A et B. Déterminer D en fonction de h' , μ et μ_0 .

1.3.2 Poussée d'Archimède

1.3.2.1 Mesure de la vitesse de gouttes de pluie

On s'intéresse ici à la vitesse de gouttes de pluie arrivant sur le sol. On peut mesurer cette vitesse par des méthodes optiques. On suppose qu'une goutte de pluie, qu'on modélisera comme une boule de rayon R et de masse volumique μ à laquelle on peut appliquer les théorèmes de la mécanique du point matériel, est partie d'un point du nuage situé à l'altitude $z = h$ avec une vitesse nulle. On choisit de fixer l'origine des énergies potentielles au niveau du sol : $z = 0$.

1. Exprimer alors pour la goutte de pluie :
 - (a) son énergie potentielle de pesanteur lorsqu'elle est à l'altitude h , en fonction de μ , R , g et h
 - (b) son énergie potentielle lorsqu'elle arrive sur le sol
 - (c) son énergie cinétique lorsqu'elle arrive sur le sol, en fonction de μ , R et v_{sol} , module de sa vitesse lorsqu'elle arrive sur le sol
2. En supposant que la goutte d'eau n'est soumise à aucune autre force que son poids, déterminer alors la vitesse v_{sol} de la goutte d'eau lorsqu'elle arrive sur le sol. Application numérique : $h = 5.10^3 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
3. En supposant que la goutte d'eau n'est soumise à aucune autre force que son poids et la poussée d'Archimède due à l'air, déterminer alors la vitesse v_{sol} de la goutte d'eau lorsqu'elle arrive sur le sol. Application numérique : $h = 5 \text{ km}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, la masse volumique de l'air est μ_{air} et on donne : masse volumique de la goutte : $\mu = 103 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\frac{\mu_{air}}{\mu} = 1,3.10^{-3}$.
4. En fait, la goutte d'eau est également soumise à une force de frottement due à l'air, dont le module est $6\pi\eta R.v(z)$, $v(z)$ étant le module de la vitesse de la goutte de pluie lorsque celle-ci est à l'altitude z et η le coefficient de viscosité dynamique de l'air. Déterminer, en prenant en compte cette force de frottement due à l'air, en plus des forces précédentes, la valeur limite v_{lim} de la vitesse de la goutte dont on donnera l'expression en fonction de η , R , μ , μ_{air} et g .

1.3.2.2 Mesure d'un coefficient de viscosité

On considère le dispositif suivant :

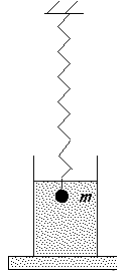


Figure 1.3.2: Dispositif étudié

L'extrémité A d'un ressort de raideur k , de longueur à vide L_0 , est fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Une sphère, assimilée à un point matériel M de masse m , est suspendue au ressort et plongée dans un liquide.

On admet, que si M est animé d'une vitesse verticale notée assez petite, les forces exercées par le liquide se réduisent à :

- La poussée d'Archimède, calculable comme si la sphère était en équilibre.
- Une force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\mu \vec{v}$ avec μ coefficient de viscosité : constante positive.

On supposera le mouvement vertical. Axe (Az) orienté vers le bas. On note $L(t)$ la longueur AM à un instant quelconque et L_{eq} cette longueur à l'équilibre. On appelle m_0 la masse de liquide « déplacée par la sphère ».

1. Déterminer l'expression de L_{eq} en fonction de m , m_0 , k , g et L_0 .
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $L(t)$.
3. On pose $z(t) = L(t) - L_{eq}$
 - (a) Montrer que $z(t)$ vérifie une équation différentielle du type $\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$
 - (b) Identifier α et ω_0 .
 - (c) Donner les expressions générales (sans calculer les constantes) des solutions de cette équation différentielle dans les 3 cas : $\alpha > \omega_0$, $\alpha = \omega_0$ et $\alpha < \omega_0$. On nommera les différents régimes d'oscillation.
 - (d) Vérifier que le mouvement est oscillatoire si $\mu < \mu_0$ avec μ_0 à définir en fonction de k et m .
4. La nature du liquide est telle que $\alpha < \omega_0$.
 - (a) Déterminer complètement $z(t)$ en fonction de z_M , ω_0 et μ^* si à $t = 0$ on a $\begin{cases} z(0) = z_M \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$ On posera $\mu^* = \mu/\mu_0$
 - (b) Déterminer la pseudo période T et le décrement logarithmique δ (après l'avoir défini de façon mathématique) en fonction de ω_0 et μ^* .
5. Si on note T_0 la période des oscillations dans l'air (frottements négligeables), exprimer μ en fonction de μ_0 , T_0 et T .

1.3.3 Equation de Bernoulli

1.3.3.1 Encore le réservoir de Torricelli...

On considère le réservoir de Torricelli vu précédemment. On le suppose initialement rempli d'une hauteur H . Calculer le temps nécessaire pour vider le réservoir. On pourra pour cela calculer la loi donnant l'évolution de la hauteur d'eau h en fonction du temps...

Application numérique : On prendra : $S = 100 \text{ cm}^2$, $s = 1 \text{ cm}^2$, $h = 50 \text{ cm}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Résolution : Loi d'évolution de la hauteur d'eau $h(t)$

- La formule de Torricelli donne la loi de vitesse : $v_B = \sqrt{2gh}$
- On sait par ailleurs que la vitesse de la surface d'eau est, par définition : $v_A(t) = -\frac{dh}{dt}$ car h diminue et on choisit par convention $v_A > 0$. La conservation du débit impose, nous l'avons vu : $v_A(t) = \frac{s}{S}v_B(t)$

Attention : on remarquera qu'on avait négligé précédemment v_A devant v_B (en disant : $v_A^2 \ll v_B^2$). Et ici, on calcule v_A ... A méditer! Il faut bien garder à l'esprit qu'on néglige toujours une grandeur devant une autre. Mais pour autant, cela ne signifie pas que l'on ne peut pas calculer cette grandeur, aussi petite soit elle.

- On obtient ainsi : $\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh(t)}$
- On peut réécrire cette équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}.dt$$

- Il suffit alors d'intégrer entre l'état initial (à $t = 0$, le réservoir est plein : $h(0) = H$) et l'instant t pour lequel la hauteur est $h(t)$. On obtiendra ainsi la loi $h(t)$:

$$\int_0^t \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int_0^t \frac{s}{S}\sqrt{2g}.dt$$

$$\text{Soit : } \left[2\sqrt{h(t)} \right]_0^t = -\frac{\sqrt{2g}s}{S}t$$

$$\text{On obtient alors : } \sqrt{h(t)} - \sqrt{H} = -\sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{s}{S}t, \text{ soit : } \sqrt{h(t)} = \sqrt{H} \left[1 - \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{s}{S}t \right]$$

Ainsi, on obtient :

$$h(t) = H \left[1 - \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{s}{S}t \right]^2$$

Remarque : cette formule n'est valable que si $1 > \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{s}{S}t$. Le réservoir est ensuite totalement vide et la modélisation adoptée ne sera plus valable.

Temps de purge : On peut alors en déduire le temps de purge t_{max} , qui correspond à l'instant exact pour lequel le réservoir est vide : $h(t_{max}) = 0$.

On en déduit alors : $1 - \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{s}{S}t_{max} = 0$, soit :

$$t_{max} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{S}{s}$$

L'application numérique donne : $t_{max} = 32 \text{ s}$

1.3.3.2 Débit et puissance à la sortie d'une conduite barrage-turbine. Phénomène de cavitation

La figure ci-dessous illustre le principe d'une chaîne de production d'énergie électrique à partir d'un barrage :

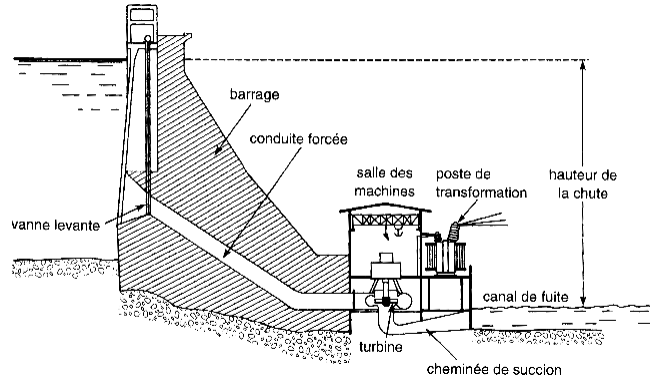


Figure 1.3.3: Barrage et centrale électrique

Nous allons étudier ce dispositif en adoptant la modélisation suivante :

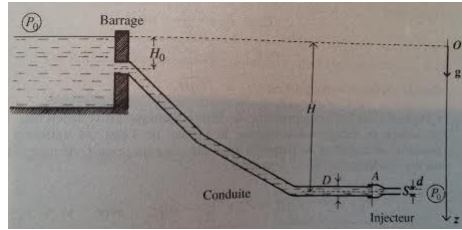


Figure 1.3.4: Modélisation de l'ensemble barrage-conduite

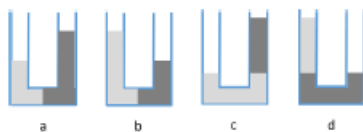
Une conduite amène l'eau (incompressible, de masse volumique μ) d'un barrage vers la turbine d'une centrale hydro-électrique. La conduite cylindrique, de diamètre constant $D = 30 \text{ cm}$ et de longueur $l = 200 \text{ m}$, se termine horizontalement, son axe étant situé à $H = 160 \text{ m}$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage de grande capacité. Le départ de la conduite est à $H_0 = 20 \text{ m}$ au-dessous de la surface libre de l'eau, de niveau pratiquement constant. On négligera tout frottement et on donne la pression atmosphérique $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

1. Montrer que si l'extrémité aval A de la conduite est à l'air libre, on aura un phénomène de cavitation (pression inférieure à la pression P_S de vapeur saturante de l'eau : $P < P_S$, avec $P_S \ll P_0$) dans une région de la conduite que l'on déterminera.
2. On visse à l'extrémité A une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie d et d'axe horizontal. Montrer que la cavitation disparaît si $d < d_0$. Calculer d_0 .
3. L'injecteur a un diamètre de sortie $d = 15 \text{ cm}$. Calculer la vitesse v_S de l'eau à la sortie, le débit volumique D_V de l'injecteur et la puissance cinétique Π_C du jet de sortie.

1.3.4 Quelques annales des QCM des IPhOs...

1.3.4.1 Tubes en U (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)

On verse dans chaque branche d'un tube en U une masse égale d'eau et d'huile. La masse volumique de l'huile vaut $2/3$ de celle de l'eau. L'eau et l'huile ne se mélangent pas. L'eau reste à gauche (gris clair) et l'huile reste à droite (gris foncé).



Quelle est la situation correspondante ?

- (a) figure a (c) figure c
(b) figure b (d) figure d

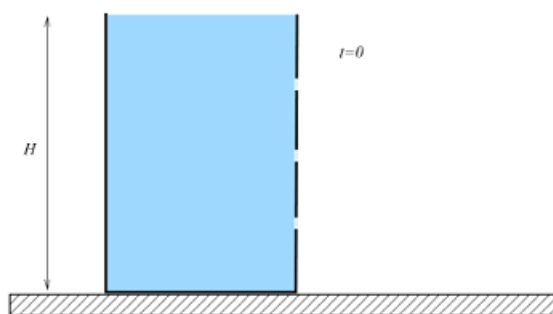
1.3.4.2 Masse volumique d'une huile (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)

Un bloc d'aluminium solide, de masse volumique $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ a un poids apparent dans l'air de $0,91 \text{ N}$ et de $0,61 \text{ N}$ dans une huile donnée. Quelle est la masse volumique de l'huile utilisée ?

- (a) 500 kg.m^{-3} (c) 1800 kg.m^{-3}
(b) 900 kg.m^{-3} (d) 4050 kg.m^{-3}

1.3.4.3 Encore un vase... (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)

On considère un vase cylindrique, de hauteur H , rempli à ras-bord d'un liquide. La partie supérieure du vase est ouverte à l'air libre, l'épaisseur du fond est négligeable et il est posé sur une table de sorte que son axe de révolution soit vertical. Trois petits orifices ont été effectués dans le vase, l'un à la distance $h_1 = H/4$ du fond du vase, le deuxième à la distance $h_2 = H/2$, le troisième à la distance $h_3 = 3H/4$ et on les ouvre simultanément à $t = 0$. On néglige tout effet de frottement ou de viscosité.

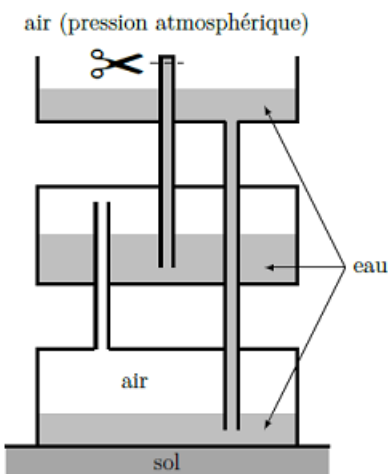


Que peut-on dire des portées d_1 , d_2 et d_3 des jets au niveau de la table, observés peu de temps après l'ouverture des orifices ?

- (a) $d_1 > d_2 > d_3$ (b) $d_2 > d_1 > d_3$ (c) $d_2 > d_1 = d_3$ (d) $d_3 > d_2 > d_1$

1.3.4.4 ...Et des tubes (d'après QCM IPhOs CPGE 2016)

Sur le système suivant, initialement au repos, on coupe l'extrémité supérieure du tube central. Que se passe-t-il ?



- (a) L'eau jaillit du tube central.
- (b) Le niveau d'eau baisse dans le tube central.
- (c) Rien.
- (d) On ne peut rien dire : il manque une donnée.

1.3.4.5 Filet d'eau d'un robinet (d'après QCM IPhOs CPGE 2016)

Un filet d'eau sort d'un robinet avec le débit volumique D , la section de sortie a un rayon r_0 . On note h la distance à la sortie pour laquelle le rayon de la section du filet a été divisé par 2 en régime permanent. L'écoulement d'eau peut être considéré comme celui d'un fluide parfait, la pression en tout point du filet d'eau est supposée égale à la pression ambiante et les phénomènes de tension superficielle sont négligeables.

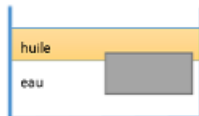


Si on choisit un robinet de rayon de sortie $2r_0$, avec un débit $2D$, comment est modifiée la distance h ?

- (a) $h \rightarrow h/8$
- (b) $h \rightarrow h/4$
- (c) $h \rightarrow h/2$
- (d) h est inchangée.

1.3.4.6 Objet flottant (d'après QCM IPhOs CPGE 2017)

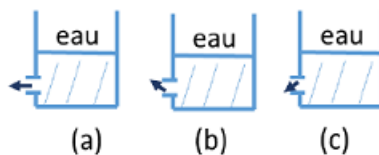
Un bloc flotte dans un mélange eau/huile selon le schéma suivant (1/5 du bloc est immergé dans l'huile et les 4/5 restant dans l'eau). La masse volumique de l'eau est de 1000 kg.m^{-3} et celle de l'huile est de 900 kg.m^{-3} . Quelle est la masse volumique de ce bloc ?



- (a) 920 kg.m^{-3} (c) 950 kg.m^{-3}
 (b) 980 kg.m^{-3} (d) 995 kg.m^{-3}

1.3.4.7 La chute de la tasse (d'après QCM IPhOs CPGE 2017)

On s'intéresse à une tasse remplie d'eau et percée par un trou. Celle-ci est lâchée en chute libre. On adoptera le point de vue d'un observateur extérieur immobile. Comment se comporte la fuite d'eau ?



- (a) Le jet d'eau est à l'horizontal (figure a). (c) Le jet d'eau est orienté vers le bas (figure c).
 (b) Le jet d'eau est orienté vers le haut (figure b). (d) L'eau ne coule plus de la tasse.

1.3.5 La fontaine de Héron (d'après Problème IPhOs 2017)

Ce problème propose d'étudier la fontaine de Héron, qui doit son nom au savant grec Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.C.). Cette fontaine est un dispositif astucieux qui permet de faire jaillir de l'eau sans utiliser de pompe.

La fontaine est constituée de deux récipients fermés partiellement remplis d'eau, surmontés d'une coupelle (voir figure 1). Un premier tube T_1 relie le fond de la coupelle au fond du récipient du bas. Un second tube T_2 plonge au fond du récipient du haut, et émerge au-dessus de la coupelle ; un troisième tube T_3 relie les parties supérieures des deux récipients, contenant de l'air (voir figure 1). Lorsqu'on remplit la coupelle d'eau, l'eau du récipient du haut jaillit par le tube au-dessus de la coupelle, qui ensuite se vide dans le récipient du bas. Lorsque le récipient du haut est vide, la fontaine s'arrête.

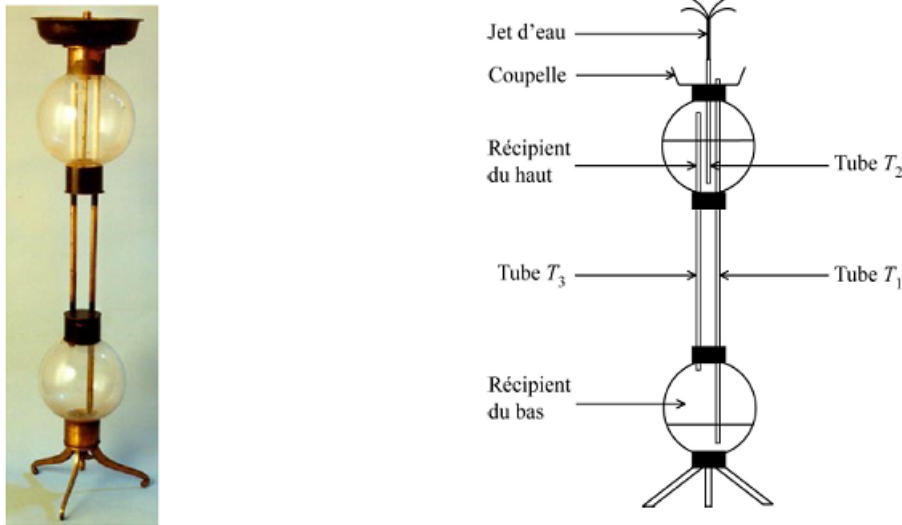


Figure 1 : Fontaine de Héron

La fontaine de Héron est basée sur le principe du siphon, que nous étudierons dans un premier temps. Dans tout le problème, le liquide de la fontaine de Héron est de l'eau, dont la masse volumique ρ est supposée uniforme et constante.

I. Loi de l'hydrostatique et principe du siphon

On considère un récipient rempli d'eau, à l'équilibre, et deux points M et N tels que M est plus haut que N ; on note z_M l'altitude du point M et z_N celle du point N.

La pression en N est supérieure à la pression en M et la différence de pression entre M et N est égale à $\|\vec{P}\|/S$, avec $\|\vec{P}\|$ la norme du poids de la colonne d'eau, de hauteur $z_M - z_N$ et de surface S , située entre M et N (voir figure 2). On note g l'intensité de la pesanteur.

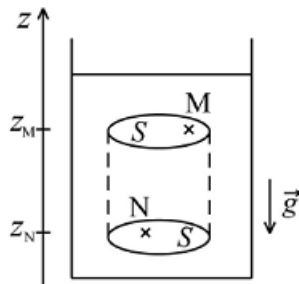


Figure 2 : Hydrostatique

1) Exprimer la pression P_N en N en fonction de la pression P_M en M, de ρ , g , z_M et z_N . Cette équation, appelée loi de l'hydrostatique, nous permettra de comprendre le fonctionnement des siphons, puis de la fontaine de Héron.

Le principe du siphon est représenté sur la figure 3 : une extrémité A d'un tuyau est plongée dans un récipient rempli d'eau, et l'autre extrémité B est placée dans l'air.

On amorce initialement le siphon en aspirant l'eau en B, afin de remplir le tuyau d'eau. On constate alors que si l'extrémité B du tuyau est placée au-dessous du niveau initial de la surface de l'eau (repéré par le point C), alors l'eau du récipient se vide spontanément par l'extrémité B du tuyau. C'est l'effet siphon.

On note z_A l'altitude du point A, z_B celle du point B et z_C celle du point C. La pression atmosphérique est notée P_0 .

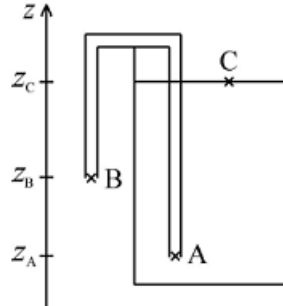


Figure 3 : Siphon

2) On bouche le tuyau en B. L'eau ne s'écoule plus et est à l'équilibre. On peut alors appliquer la loi de l'hydrostatique. En déduire la pression P_A en A en fonction de P_0 , ρ , g , z_A et z_C .

Lorsque l'eau s'écoule, on ne peut plus appliquer la loi de l'hydrostatique. On suppose l'écoulement stationnaire, et sans dissipation visqueuse ou thermique. On peut alors appliquer la loi de Bernoulli sur une ligne de courant entre les points A et B. La vitesse de l'écoulement est notée v_A au point A et v_B au point B. La loi de Bernoulli s'écrit alors :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$$

3) On suppose que le tuyau est de section constante et que le débit entrant en A est le même que le débit sortant en B, si bien que $v_A = v_B$. Exprimer alors la pression P_A en A en fonction de P_0 , ρ , g , z_A et z_B .

4) En déduire comment le siphon fonctionne, et expliquer pourquoi il est nécessaire que l'extrémité libre du tuyau soit placée au-dessous du niveau de la surface de l'eau.

II. Fontaine de Héron

5) Expliquer qualitativement en quoi la fontaine de Héron peut être vue comme un siphon. Quel récipient se vide dans quel autre ? Reproduire le schéma de la figure 1 et y représenter par des flèches le sens d'écoulement de l'eau dans chaque tuyau.

On cherche à évaluer la vitesse d'éjection de l'eau à la sortie du tube T_2 , la hauteur du jet en sortie du tube T_2 , ainsi que la durée au bout de laquelle la fontaine s'arrête.

La figure 4 schématise les deux récipients, la coupelle et les tubes qui les relient.

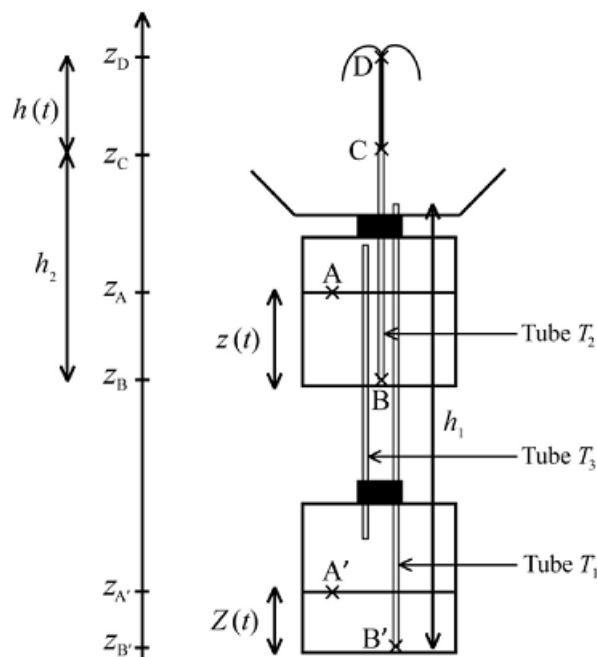


Figure 4 : Schéma de la fontaine de Héron

Les récipients sont identiques. Afin de simplifier la résolution, ils sont supposés parallélépipédiques, de section carrée S dans un plan horizontal. La hauteur d'eau dans le récipient du haut est notée $z(t)$, et celle dans le récipient du bas $Z(t)$. Les trois tubes ont la même section s . Le tube T_1 est de hauteur h_1 et le tube T_2 de hauteur h_2 . La pression atmosphérique est notée P_0 .

Le point A (respectivement A') est à la surface de l'eau, dans le récipient du haut (respectivement du bas). Le point B est à l'entrée du tube T_2 , supposée quasiment au même niveau que le fond du récipient du haut, si bien que $z(t) = z_A(t) - z_B$. De même, le point B' est à l'entrée du tube T_1 , supposée quasiment au même niveau que le fond du récipient du bas, si bien que $Z(t) = z_{A'}(t) - z_{B'}$.

Le point C est situé à la sortie du tube T_2 , donc $h_2 = z_C - z_B$. Le point D est situé en haut du jet d'eau. La hauteur du jet d'eau est notée $h(t) = z_D(t) - z_C$.

Les normes de la vitesse de l'eau aux points A, B et C sont notées respectivement v_A , v_B et v_C .

Les variations de débit sont supposées suffisamment lentes pour que les écoulements puissent être considérés comme stationnaires. $Z(t)$ et $z(t)$ varient suffisamment lentement pour qu'on puisse appliquer la loi de l'hydrostatique dans les récipients en des points situés loin des entrées des tubes T_1 et T_2 .

On suppose qu'à l'instant initial, la fontaine vient d'être amorcée ; tous les tubes sont remplis d'eau, le récipient du haut est rempli, et le récipient du bas contient très peu d'eau : $z(t=0) = H$ et $Z(t=0) = 0$.

Données : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $h_1 = 60 \text{ cm}$; $h_2 = 25 \text{ cm}$; $H = 15 \text{ cm}$; la section S des récipients est carrée, de 10 cm de côté ; la section intérieure s des tubes est circulaire, de 3,0 mm de diamètre.

6) Quel est le lien entre $z(t)$ et $Z(t)$?

7) $P_{A'}$ est la pression de l'air dans le récipient du bas. Déterminer la pression $P_{A'}$ en A' en fonction de P_0 , ρ , g , h_1 et Z .

8) Le tube T_3 assure l'égalité des pressions dans l'air des deux récipients, donc $P_{A'} = P_A$.

8.a) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et C, en négligeant la vitesse v_A de l'eau au point A devant la vitesse v_C de l'eau au point C. En déduire l'expression de $v_C(t)$ en fonction de h_1 , h_2 , $z(t)$, $Z(t)$ et g .

8.b) Comment évolue $v_C(t)$ entre l'instant initial et l'instant où la fontaine s'arrête ?

9) La hauteur du jet d'eau est $h(t) = z_D(t) - z_C$.

9.a) Déterminer l'expression de $h(t)$ en fonction de h_1 , h_2 , $z(t)$ et $Z(t)$.

9.b) Comment la hauteur $h(t)$ évolue-t-elle entre l'instant initial et l'instant où la fontaine s'arrête ?

9.c) On note h_{min} et h_{max} les valeurs minimale et maximale de $h(t)$. Que vaut la hauteur moyenne $\langle h \rangle = \frac{h_{min}+h_{max}}{2}$ du jet d'eau ? Faire l'application numérique.

9.d) En pratique, on observe que la hauteur du jet d'eau ne dépasse pas 20 cm. Comment peut-on expliquer cette différence ?

On cherche maintenant à déterminer la durée au bout de laquelle la fontaine s'arrête. Pour cela, on commencera par établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

10) On considère le récipient du haut. En faisant un bilan de volume entre les instants t et $t + dt$, déterminer le lien entre dz/dt , s , S et v_B .

11) Le tube T_2 étant de section constante et l'écoulement étant supposé stationnaire, la vitesse v_B de l'eau au point B est égale à la vitesse v_C de l'eau au point C. En supposant que les résultats précédents restent valables, montrer que $z(t)$ vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dz}{dt} + \frac{s}{S} \sqrt{2g(h_1 - h_2 - H + 2z)} = 0$$

12) Intégrer cette équation différentielle entre $t = 0$ et $t = T$ (instant auquel la fontaine s'arrête). En déduire l'expression de T en fonction de s , S , g , h_1 , h_2 et H .

13) Calculer la valeur numérique de T .

14) Comment doit-on faire varier s , S et H pour augmenter la durée de fonctionnement de la fontaine ? Commenter.

15) Pour une valeur de H fixée, peut-on à la fois augmenter la hauteur moyenne du jet d'eau et la durée de fonctionnement de la fontaine ? Commenter.

Chapter 2

Tension superficielle et capillarité dans un liquide

Ce cours, comme le précédent, va nous permettre de caractériser l'état fluide d'un point de vue mécanique. Plus précisément, nous allons ici nous intéresser aux phénomènes qui interviennent aux interfaces du système fluide.

2.1 Introduction à la tension superficielle

2.1.1 Généralités et importance du phénomène

De nombreux faits expérimentaux et observations courantes ne peuvent pas être interprétés avec les outils (forces, énergies,...) que nous avons vus jusqu'ici. Citons :

- Si l'on pose une aiguille d'acier à la surface de l'eau, celle-ci peut flotter et ne pas couler. Pourtant la masse volumique de l'acier est 7 fois supérieure à celle de l'eau.... On peut également réaliser cette expérience avec une pièce de monnaie.
- Certains insectes marchent sur l'eau...
- L'eau remonte le long des tiges dans les plantes (sans que celles-ci soient munies de pompes...)

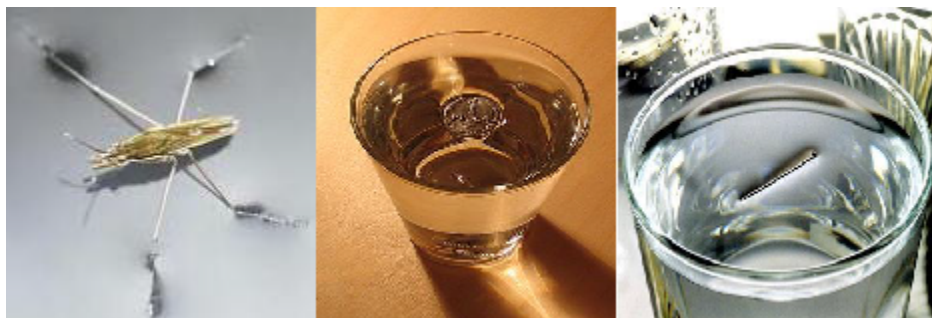


Figure 2.1.1: Quelques illustrations de la tension superficielle...

Tous ces phénomènes sont dus à la **tension superficielle**, et l'objectif de ce cours est de se doter des outils permettant d'expliquer et de quantifier ces faits. Cette tension superficielle est propre aux liquides et va se manifester au niveau des interfaces de ceux-ci. On peut ainsi avoir l'impression que la surface du liquide se comporte comme une membrane élastique...

Cette tension superficielle permet d'expliquer de très nombreux phénomènes : capillarité, formation et stabilité de gouttes, angle de contact entre un liquide et un solide,....

2.1.2 Origine microscopique de la tension superficielle

Pour comprendre l'origine de ce phénomène, il faut passer à l'échelle microscopique... Dans un liquide, chaque molécule sera soumise à l'attraction des molécules voisines (interactions de Van der Waals et/ou liaisons hydrogène). La résultante de ces forces, dirigées dans toutes les directions, est en moyenne nulle.

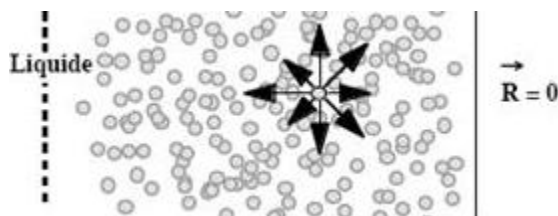


Figure 2.1.2: Interactions dans un fluide

Si l'on considère l'interface entre le liquide et le gaz, la symétrie disparaît et la résultante des forces de liaison n'est plus nulle. En effet, chaque molécule de la surface du liquide subit des actions des molécules situées en dessous dans le liquide, mais peu d'actions des molécules de gaz situées au dessus.

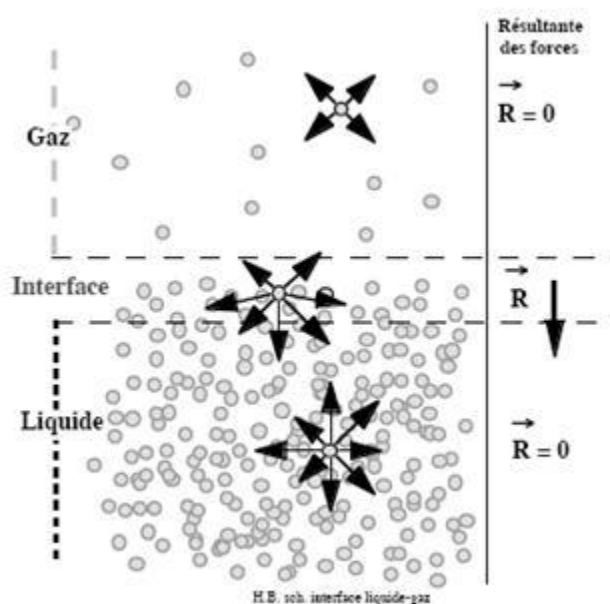


Figure 2.1.3: Interactions de surface

Cette dissymétrie impose une résultante des forces dirigées vers le bas et localisée au niveau de la surface du liquide. Tout se passe comme si on avait une membrane “tendue” au dessus du liquide, et exerçant une force qui comprime ce liquide.

C'est pour cela qu'on parle de tension superficielle : c'est une force de tension qui s'exerce au niveau de la surface du liquide. L'épaisseur de cette couche superficielle est de l'ordre de 1 à 100 nm.

2.2 Modélisation et lois macroscopiques

2.2.1 Travail et force de tension superficielle

2.2.1.1 Une première approche qualitative : le pourquoi de la goutte d'eau...

Considérons un système liquide de volume donné. On a vu dans le cours de mécanique que tout système tend spontanément à minimiser son énergie potentielle : l'état d'équilibre est ainsi celui correspondant au minimum d'énergie potentielle.

Dans le cas d'un système liquide, la minimisation de cette énergie implique une surface minimale. En effet, la résultante des forces de surface s'appliquera alors sur une surface plus faible et l'énergie potentielle dont elle dérive sera alors moins importante.

Ainsi, tout système liquide tend spontanément à minimiser sa surface.

On peut montrer mathématiquement que la sphère est la forme qui, pour un volume donné, minimise la surface. C'est pour cette raison que l'eau est généralement rencontrée sous forme de gouttes.



Figure 2.2.1: La goutte d'eau

2.2.1.2 Travail et variation de surface

On vient de mentionner que le système liquide va spontanément adopter la forme qui minimise sa surface. Si on veut augmenter la taille de cette surface, il faudra donc apporter de l'énergie au système. En mécanique, cette énergie apportée correspond à un travail.

On admet qu'il y a un rapport de proportionnalité entre le travail élémentaire apporté δW et la variation de surface correspondante dA :

$$\delta W = \sigma dA$$

Le coefficient de proportionnalité σ est appelé **coefficient de tension superficielle** et dépend du liquide étudié et de la température. Il s'exprime en $N.m^{-1}$.

Liquide	σ ($N.m^{-1}$) à 20 °C
eau (à 20 °C)	73×10^{-3}
eau (à 0 °C)	$75,6 \times 10^{-3}$
huile végétale	32×10^{-3}
Ethanol	22×10^{-3}
Ether	17×10^{-3}
Mercure	480×10^{-3}

Figure 2.2.2: Quelques ordres de grandeur

2.2.1.3 Expression de la force de tension superficielle

Le travail apporté précédemment pour engendrer la variation de surface peut être associé à une force. Établissons l'expression de celle-ci. Afin de simplifier l'étude, nous considérerons ici une géométrie idéale, mais l'expression de la force sera générale. Soit un film de fluide (de savon par exemple), tendu sur un cadre rectangulaire dont un des côtés est une tige mobile :

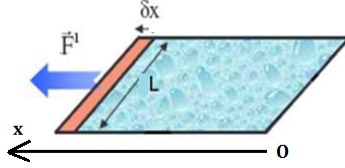


Figure 2.2.3: Film et tige mobile

On applique une force $\vec{F}$ sur la tige et il s'ensuit un déplacement élémentaire $\vec{dl} = dx.\vec{e}_x$ de celle-ci. Le travail ainsi fourni au liquide est : $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F.dx$

Or on a vu précédemment que $\delta W = \sigma dA$ et, ici, la variation de surface est $dA = L.dx$. D'où l'expression de la force : $F = \sigma.L$. Cette expression peut se généraliser à toute géométrie, et on retient l'expression de la **force de tension superficielle** :

$$\boxed{\vec{F} = \sigma.L\vec{u}}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire tangent à la surface et L la longueur sur laquelle celle-ci est appliquée.

2.2.2 Loi de Laplace

Une première conséquence de l'existence de cette tension superficielle est qu'il existera une différence de pression de part et d'autre d'une interface fluide. La loi de Laplace permet de caractériser ce fait. Nous allons établir cette loi dans une géométrie simplifiée : celle d'une bulle de gaz sphérique au sein d'un liquide.

2.2.2.1 Cas d'une bulle sphérique

Considérons donc une bulle sphérique de rayon R. Notons P_i la pression à l'intérieur de la goutte et P_e la pression à l'extérieur. On a vu précédemment que l'existence d'une interface implique une résultante de force dirigée du gaz vers le liquide. La goutte étant supposée à l'équilibre, la pression doit être supérieure à l'intérieur de la goutte, afin de compenser cette force de tension superficielle.

- Calculons la différence de pression : $\Delta p = P_i - P_e$:

Pour cela, supposons que l'on augmente le rayon de la bulle d'une quantité dR . Il s'ensuit une augmentation de volume $dV = S.dR = 4\pi R^2 dR$ où S est la surface de la goutte.

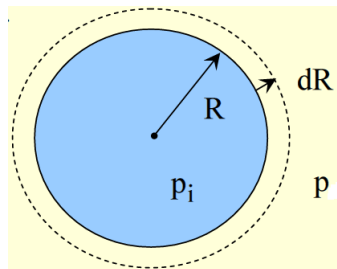


Figure 2.2.4: Bulle de gaz et variation de volume

Les travaux des forces de pression associés sont alors :

$$- \delta W_e = -P_e S \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{dl} \text{ or } \vec{dl} = dR \cdot \vec{e}_r \text{ d'où } \delta W_e = -P_e S dR = -P_e \cdot 4\pi R^2 dR$$

$$- \delta W_i = +P_i S \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{dl} \text{ or } \vec{dl} = dR \cdot \vec{e}_r \text{ d'où } \delta W_i = +P_i S dR = +P_i \cdot 4\pi R^2 dR$$

Ainsi, le travail total des forces de pression sera $\delta W = (P_i - P_e) \cdot 4\pi R^2 dR$

Or on a vu précédemment que l'on pouvait lier travail des forces et variation de surface par : $\delta W = \sigma \cdot dS$.
 Déterminons alors la variation de la surface correspondant à une variation de son rayon de dR : $S = 4\pi R^2$, soit $\frac{dS}{dR} = 8\pi R$. Soit $dS = 8\pi R dR$. On obtient alors $\delta W = \sigma \cdot 8\pi R dR = (P_i - P_e) \cdot 4\pi R^2 dR$.

Par identification on obtient alors la **loi de Laplace**, qui relie les valeurs des pressions de part et d'autre de l'interface :

$$\Delta p = P_i - P_e = \frac{2\sigma}{R}$$

On constate ainsi que la surpression Δp est une fonction inverse du rayon de la goutte.

2.2.2.2 Généralisation

La loi de Laplace a en réalité une portée plus générale : elle s'applique à toute géométrie, en ne considérant non plus le rayon R , mais le rayon de courbure R , qui est le rayon "local" qu'aurait une surface sphérique localement tangente à la surface considérée. En particulier, pour une surface plane, le rayon de courbure est infini, donc la différence de pression sera nulle.

2.2.2.3 Application au cas d'une bulle de savon

Considérons ici une bulle de savon, sphérique, de rayon R .

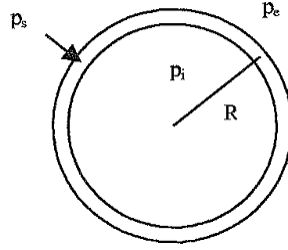


Figure 2.2.5: Bulle de savon

Elle est constituée de deux interfaces :

- Une entre l'air extérieur, de pression P_e , et le film de savon, de pression P_s
- Une entre l'air intérieur, de pression P_i , et le film de savon, de pression P_s .

On peut alors appliquer la loi de Laplace vue précédemment à chacune de ces interfaces :

$$\bullet P_i - P_s = \frac{2\sigma}{R}$$

$$\bullet P_s - P_e = \frac{2\sigma}{R}$$

Il s'ensuit la loi donnant la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte :

$$P_i - P_e = \frac{4\sigma}{R}$$

La pression est donc plus grande dans une petite bulle que dans une grande bulle. En mettant deux gouttes en contact, elles vont ainsi s'associer pour former une goutte plus grande.

2.2.2.4 Une application en biologie : la respiration chez les êtres vivants

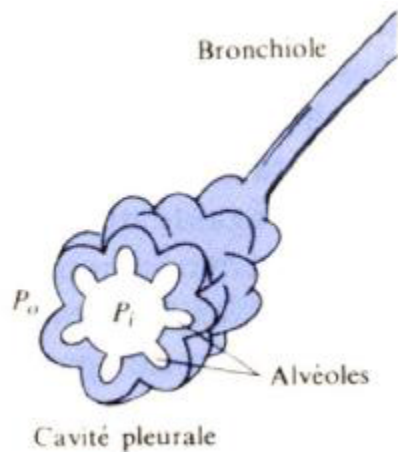


Figure 2.2.6: Alvéoles et poumon humain

La surface des poumons est augmentée par la présence des alvéoles. La dilatation des poumons requiert un travail considérable car la tension superficielle qui colle les membranes alvéolaires est élevée. Pour faciliter la ventilation, des surfactants réduisent la tension superficielle à la surface interne des alvéoles. La présence de ces surfactants réduit le travail nécessaire à la dilatation des poumons : lorsque l'alvéole se dilate, la concentration des surfactants par unité de surface diminue et la tension superficielle augmente. La résistance à la dilatation augmente et protège les alvéoles contre l'éclatement.

2.2.3 Mouillabilité et angle de contact

2.2.3.1 Quelques observations habituelles

- Dans un tube de verre étroit (tube à essai), l'interface air-liquide est bombée vers le bas : la surface forme un ménisque concave ; de plus, l'eau s'élève le long des parois.
- En réalisant la même expérience avec du mercure, les faits sont inversés : le mercure descend dans le tube et le ménisque est bombé.

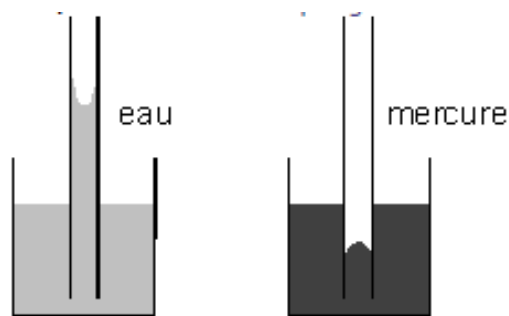


Figure 2.2.7: Ménisque d'eau et de mercure

- L'eau monte aussi le long des fibres d'une feuille de papier trempée dans un verre d'eau. Il peut donc avoir ascension de l'eau, malgré les forces de gravité.

2.2.3.2 Une première interprétation

Une goutte de liquide déposée sur une plaque solide plane et horizontale peut :

- Soit s'étaler, on dit que le liquide mouille parfaitement le solide.

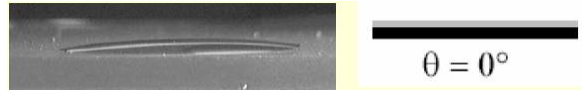


Figure 2.2.8: Mouillage parfait

- Soit former une lentille, avec deux cas de figure :
 - le liquide mouille imparfaitement le solide $\rightarrow \theta < 90^\circ$:



Figure 2.2.9: Mouillage imparfait

- le liquide ne mouille pas le solide $\rightarrow \theta > 90^\circ$

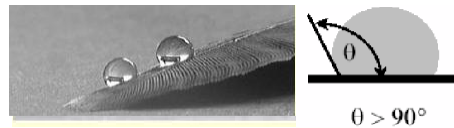


Figure 2.2.10: Absence de mouillage

2.2.3.3 Modélisation

L'angle θ est appelé l'angle de contact. Il dépend a priori du liquide étudié, du solide utilisé, et du gaz environnant. Ces trois paramètres sont donc à prendre en compte dans la modélisation, et trois forces vont intervenir dans le bilan des forces :

- La tension superficielle σ_{SL} entre le solide et le liquide
- La tension superficielle σ_{LV} entre le liquide et la vapeur
- La tension superficielle σ_{SV} entre le solide et la vapeur

Ces trois forces peuvent se représenter de la façon suivante, étant donné que la force de tension superficielle est tangente à l'interface :

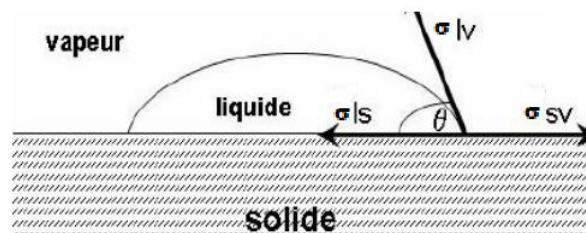


Figure 2.2.11: Bilan des forces

On peut alors écrire l'équilibre de la goutte, par projection sur l'axe horizontal :

$$\sigma_{SV} = \sigma_{SL} + \sigma_{LV} \cdot \cos \theta$$

On en déduit alors l'expression de l'angle de contact par :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LV}}$$

Interface dans l'air	Ange de contact θ	Ascension capillaire	Interface dans l'air	Ange de contact θ	Ascension capillaire
Eau - verre	0	↑	Kérozène - verre	26	↑
Liquide org. - verre	0	↑	Eau - paraffine	107	↓
Alcool - verre	0	↑	Eau - acier	90	nulle
Mercure - verre	140	↓	Eau - bois	0	↑

Figure 2.2.12: Quelques valeurs d'angles de contact

2.2.4 Capillarité et loi de Jurin

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment caractériser l'angle de contact. Voyons maintenant comment expliquer les phénomènes de capillarité, à savoir la montée de l'eau dans les tubes, les plantes,... Modélisons donc cette situation :

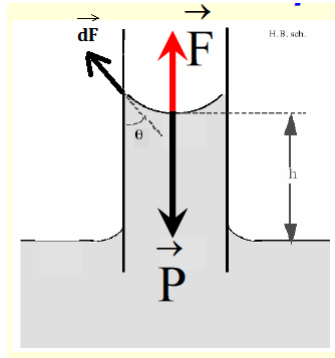


Figure 2.2.13: Montée capillaire

Un tube de verre de faible diamètre est plongé dans un liquide mouillant, de l'eau par exemple. Dans le tube, le niveau du liquide est supérieur au niveau de la surface libre du récipient. Le ménisque concave fait un angle θ avec la surface du tube. L'ascension capillaire est due aux forces superficielles $d\vec{F}$ appliquées en tout point du contour du ménisque, et tangente à celui-ci. La résultante $\vec{F}$ de ces forces équilibre le poids $\vec{P}$ du liquide soulevé. L'élévation du liquide dans le tube compense la différence de pression entre les deux côtés de la paroi, d'après la loi de Laplace.

Réalisons alors le bilan des forces qui s'appliquent sur la colonne de fluide (c'est à dire l'eau qui est montée dans le tube). On oriente l'axe Oz selon la verticale ascendante :

- Le poids de la colonne d'eau : $\vec{P} = m\vec{g} = -\pi R^2 \rho g h \vec{e}_z$
- La résultante de la force de tension superficielle : $\vec{F} = 2\pi R \sigma \cos \theta \vec{e}_z$

L'équilibre pour la colonne de fluide s'écrit alors :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

Soit, après projection : $\pi R^2 \rho g h = 2\pi R \sigma \cos \theta$

On en déduit alors la hauteur de montée dans le tube, qui se traduit par la **loi de Jurin** :

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}$$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} R : \text{rayon intérieur du tube} \\ \rho : \text{masse volumique du liquide} \\ g : \text{accélération de la pesanteur} \\ \sigma : \text{tension superficielle du liquide} \\ \theta : \text{angle de raccordement liquide/solide. Rq : dans le cas du mouillage parfait, } \cos \theta = 1. \end{array} \right.$

Remarque : Si l'angle θ dépasse 90° , la loi de Jurin donne h négatif. On parle alors de dépression capillaire. C'est le cas du mercure au contact du verre et de tous les liquides non mouillants. Cette fois les forces de cohésion sont supérieures aux forces d'adhésion, le liquide ne mouille pas les parois du tube. Le niveau du liquide s'abaisse dans le tube au dessous du niveau de la surface libre du récipient. Le ménisque est convexe et forme l'angle $\theta > 90^\circ$ avec la paroi du tube. Les forces de tension superficielle tirent le liquide vers le bas. La résultante F de ces tensions équilibre maintenant le poids P du liquide manquant.

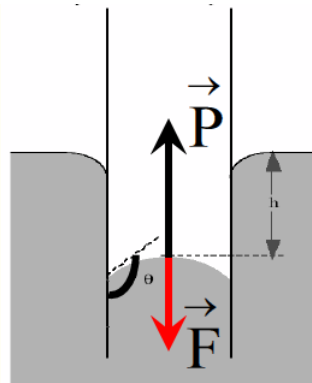
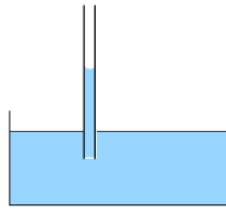


Figure 2.2.14: Descente capillaire

2.3 Quelques exercices

2.3.1 Montée d'un liquide dans un capillaire (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)

On note h la hauteur à laquelle remonte un liquide dans un tube capillaire de rayon r petit devant la longueur capillaire du liquide. En ajoutant une petite quantité de tensioactif, on abaisse la tension de surface du liquide d'un facteur 2 sans modifier sensiblement sa masse volumique. Quel serait alors le rayon du tube qui permettrait la même hauteur de remontée, en supposant que l'on est dans une situation de mouillage total (soit un angle de contact nul) ?



(a) $r/2$

(b) r

(c) $\sqrt{2}r$

(d) $2r$

2.3.2 Quelques exercices d'application

- Un liquide a une constante de tension superficielle $\sigma = 25.10^{-3} N.m^{-1}$. Avec ce liquide, on souffle une bulle de savon de rayon $R = 3$ cm.
 - Calculer la surpression à l'intérieur de cette bulle.
 - La pression extérieure étant égale à 105 Pa, calculer le travail total dépensé pour souffler la bulle.
- Un liquide mouillant parfaitement le verre et de masse volumique $\rho = 1,05.10^3 kg.m^{-3}$, s'élève à une hauteur moyenne $h = 1,5$ cm dans un tube capillaire en verre, vertical et de diamètre intérieur $d = 1$ mm. Calculer la constante de tension superficielle du liquide ($g = 10 m.s^{-2}$).
- Soit un tube de diamètre intérieur plongeant verticalement dans un liquide de tension superficielle σ et de masse volumique ρ . On suppose la mouillabilité parfaite et on désigne par h la dénivellation du liquide dans le tube. Avec l'eau, on trouve $h_0 = 92,3 mm$ ($\rho_0 = 0,9973.10^3 kg.m^{-3}$, $\sigma_0 = 71,93.10^{-3} N.m^{-1}$). Pour le benzène, on trouve $h = 42,4$ mm.
 - En déduire la constante de tension superficielle du benzène sachant que sa masse volumique ρ a pour valeur $0,8840.10^3 kg.m^{-3}$.
 - Chaque ménisque étant repéré à 0,1 mm près, calculer l'incertitude absolue sur cette tension superficielle.
- Un cadre métallique carré de 5 cm de côté est déposé dans un bain de mazout. Pour séparer le cadre du liquide, il faut exercer une force de $7,32.10^{-3} N$. Calculer la tension superficielle du mazout.

2.3.3 Capillarité

On considère un tube très fin, de rayon interne $r = 0.5 \text{ mm}$ maintenu verticalement, en contact dans sa partie basse avec de l'eau contenue dans un cristalliseur ($\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$).

Une aspiration dans le tube génère une dépression de 1000 Pa par rapport à la pression atmosphérique dans la partie haute du tube, qui est ensuite obturé.

L'eau remonte alors dans le tube et se maintient à un niveau plus élevé que celui du cristalliseur.

- a) En négligeant le phénomène de capillarité, calculer la hauteur h qui devrait séparer les niveaux de l'eau entre le tube et le cristalliseur ($g = 9.81 \text{ m.s}^{-1}$)

Une mesure de la distance qui sépare les niveaux de l'eau entre le tube et le cristalliseur donne la valeur $h' = 12.2 \text{ cm}$

- b) Justifier l'inégalité constatée entre les valeurs de h et de h' , et son signe
c) Le verre étant propre comment peut-on qualifier le contact entre le liquide et le tube ?

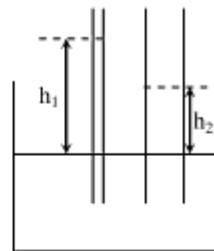
Représenter la forme de l'interface liquide-air dans le tube et donner l'expression du saut de pression associé. On notera θ l'angle de contact solide-liquide.

- d) Dédurre de la différence de hauteur de liquide la valeur de cet angle θ .

2.3.4 Capillarité et température

Deux tubes capillaires verticaux en verre de diamètre intérieurs respectifs $0,1$ et $0,3 \text{ mm}$ plongent dans de l'eau pure à 20°C contenue dans un récipient.

- 1- Quelle est la différence entre les niveaux du liquide dans les deux tubes ?
- 2- Que devient la différence entre les niveaux lorsqu'on porte l'ensemble de 20°C à 70°C .



On donne : $\sigma = 0,073 \text{ N.m}^{-1}$ pour l'eau à une température de 20°C .

$\sigma' = 0,064 \text{ N.m}^{-1}$ pour l'eau à une température de 70°C .

$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$; $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

2.3.5 Montée entre deux plaques

On plonge dans un vase contenant de l'eau pure à 20°C deux plaques planes en verre parfaitement mouillées maintenues parallèles à une distance $e = 1\text{ mm}$ l'une de l'autre.

Calculer la hauteur d'ascension du liquide entre ces deux plaques.

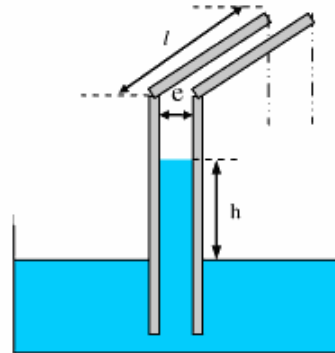
Corrigé :

On dispose de deux lames de verres plongées dans un vase contenant de l'eau, de manière que les deux lames soient verticales, parallèles et voisines l'une de l'autre.

Soit ℓ la largeur des deux lames et e l'espacement entre elles.

On suppose que l'eau mouille parfaitement le verre ($\alpha = 0$).

On constate que l'eau s'élève entre les deux lames.



On a deux plaques $\Rightarrow$ La force de tension superficielle totale est :

$$F_t = 2\sigma \ell$$

Le poids du liquide soulevé est :

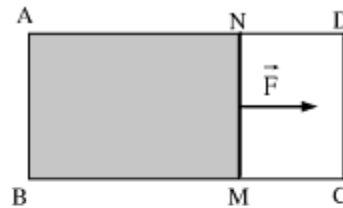
$$P = \rho h e \ell g$$

À l'équilibre, $F_t = P \Rightarrow 2\sigma \ell = \rho h e \ell g$

Soit : $h = \frac{2\sigma}{\rho g e}$ A.N : $h = \frac{2 \cdot 0.073}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 0,0146\text{ m} = 1,46\text{ cm}$

2.3.6 Rupture d'un film

On considère une lame d'eau de savon s'appuyant sur un cadre métallique rectangulaire ABCD. Une tige légère MN est déposée sur la lame d'eau tel que MN parallèle à AB. Après le mouillage, on crève le côté MNDC de la lame.



- 1- Déterminer la force qu'il faut exercer sur la tige MN pour la maintenir dans sa position initiale
- 2- On déplace légèrement la tige MN d'une longueur d pour augmenter la surface ABMN. Calculer le travail fourni.

2.3.7 La lentille liquide (d'après Exercice IPhOs CPGE 2015)

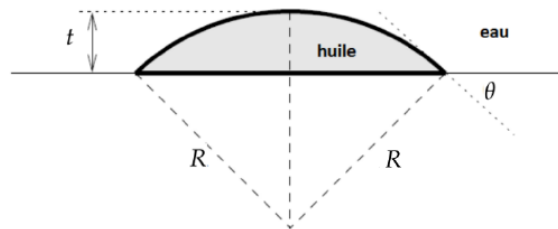
Les smartphones et appareils photos actuels sont équipés d'un module "autofocus" permettant d'adapter la distance focale de la lentille de l'objectif pour réaliser la mise au point sur les photographies.

Certains de ces appareils sont équipés de lentilles liquides : une goutte d'huile est placée dans une cellule de verre hermétique remplie d'eau ou d'un liquide similaire ne se mélangeant pas avec l'huile. Les deux liquides sont scellés et tiennent dans un revêtement métallique d'un diamètre inférieur à 10 mm.

En appliquant une tension à la goutte, la forme de celle-ci change en l'espace d'un centième de seconde. Cette technologie a de nombreux avantages par rapport aux autres dispositifs mécaniques actuellement utilisés :

- la puissance nécessaire à l'adaptation de la forme de la goutte d'huile est extrêmement faible (quelques milliwatts suffisent), ce qui est important dans des dispositifs limités par la durée de vie des batteries ;
- seuls des liquides sont mis en jeu dans ce dispositif, il est donc particulièrement résistant aux chocs et bien plus rapide que les systèmes mécaniques ;
- enfin, la petite taille du dispositif est un réel atout dans les appareils mobiles.

On se propose d'étudier le principe de fonctionnement de ces lentilles liquides. On s'intéresse uniquement au comportement de la goutte d'huile représentée ci-dessous par une calotte sphérique de rayon R déposée sur un substrat horizontal. Cette calotte a une épaisseur t . L'angle de contact entre le substrat et la goutte est noté θ .



Question n°1

Citer un autre exemple de lentille à focale variable.

Question n°2

En modifiant la tension appliquée sur le substrat, l'angle de contact θ peut être modifié, ce qui permet de modifier la distance focale de la lentille. Pour la lentille formée par l'huile plongée

dans l'eau, la distance focale est donnée par la formule suivante :

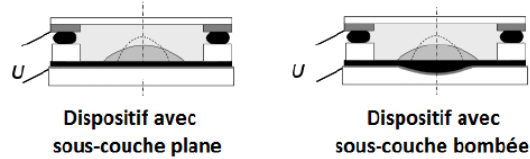
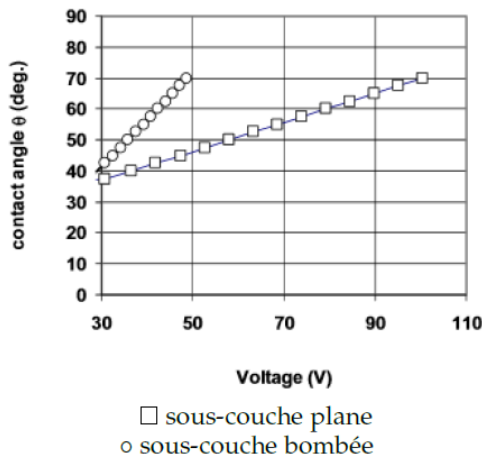
$$\frac{1}{f} = \frac{n_{\text{huile}} - n_{\text{eau}}}{R}$$

avec n_{huile} et n_{eau} les indices de réfraction de l'huile et de l'eau.

En raisonnant de manière qualitative, comment la distance focale de la lentille varie-t-elle avec l'angle de contact ?

Question n°3

La courbe suivante représente l'angle de contact en fonction de la tension appliquée pour une goutte déposée sur un substrat avec une sous-couche plane (carrés) et pour une goutte déposée sur un substrat avec une sous-couche bombée (cercles). Commenter l'allure de ces courbes. Quel type de substrat conseilleriez-vous pour réaliser une lentille liquide destinée à un téléphone portable ? Justifier.



En traits pleins, la lentille est représentée lorsqu'aucune tension n'est appliquée aux électrodes. Pour une tension non nulle, on obtient une lentille ayant la forme représentée en traits pointillés.

Question n°4

Exprimer l'angle de contact θ en fonction de R et t .

Question n°5

En choisissant la géométrie adaptée à un téléphone portable, déterminer l'angle de contact lorsqu'aucune tension n'est appliquée.

Question n°6

On réalise la lentille en utilisant une goutte d'huile sphérique de rayon $r = 2,5$ mm. Celle-ci s'étale pour former une calotte sphérique d'épaisseur t . Exprimer le rayon R du dioptre ainsi formé en fonction de r . Quelle sera l'épaisseur t de la lentille en l'absence de tension ?

Question n°7

La forme d'une goutte déposée sur une surface dépend de l'angle de contact mais aussi de sa taille. On s'intéresse ici à l'influence de la taille de la goutte uniquement.

On peut définir la longueur capillaire l_c comme la longueur pour laquelle la pression hydrostatique est égale à la pression de Laplace. En raisonnant par analyse dimensionnelle, proposer une expression de la pression de Laplace qui ne dépend que du rayon R de la goutte et de la tension superficielle γ à la limite eau/huile.

Question n°8

Toujours par analyse dimensionnelle, donner alors une expression de la longueur capillaire l_c . Pourquoi l'huile ne s'étale-t-elle pas lorsqu'on prépare la lentille liquide ?

On donne quelques caractéristiques de l'huile :

masse volumique ρ	920 kg.m^{-3}
indice de réfraction n_{huile}	1,52
tension de surface à l'interface eau/huile γ	$20.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$