

1 Etude de l'impédance

Rappels :

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\phi) = |\underline{Z}| \cos \phi + j|\underline{Z}| \sin \phi$$

D'où :

$$R = |\underline{Z}| \cos \phi \text{ et } X = |\underline{Z}| \sin \phi$$

De plus :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \left| \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right| \exp j(\phi_u - \phi_i)$$

$$R = |\underline{Z}| \cos \phi = \left| \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right| \cos(\phi_u - \phi_i) \text{ et } X = |\underline{Z}| \sin \phi = \left| \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right| \sin(\phi_u - \phi_i)$$

Il faut donc mettre en œuvre un protocole permettant de mesurer, pour une fréquence f donnée :

- ✗ l'amplitude (ou la valeur efficace) de la tension aux bornes du rhéostat.
- ✗ l'amplitude (ou la valeur efficace) du courant traversant le rhéostat.
- ✗ Le déphasage de la tension aux bornes du rhéostat par rapport au courant le traversant.

On envisage alors le montage donné figure 1

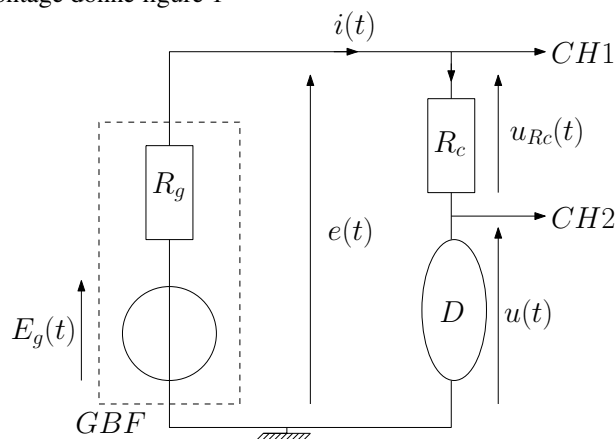


FIGURE 1 – Protocole pour déterminer l'impédance d'un dipôle D

Attention !!

$u_{Rc}(t)$ ne peut pas être affichée directement et en même temps que $u(t)$ (les oscilloscopes mesurent des potentiels par rapport à la masse) : pour visualiser $u_{Rc}(t)$, il faut utiliser la fonction « math » pour faire une soustraction : $u_{Rc}(t) = e(t) - u(t)$. Une autre solution consisterait à enlever la masse du GBF : soit en interdisant le contact électrique avec la terre à l'aide d'une prise « bouchon » (interdit pour des raisons de sécurité), soit en utilisant un transformateur d'isolement (« copier/coller » des tensions sans report de masse).

Détails du protocole :

- ✗ La mesure de la fréquence doit être précise, elle peut se faire à l'oscilloscope.
- ✗ Mesure de U_m (ou U_{eff}) :
 - Mesure à l'oscilloscope à l'aide de « mesure », on obtient U_m ou U_{eff} .
 - Mesure au voltmètre (voir figure 2), mode AC (ou AC+DC), on obtient U_{eff}
- ✗ Mesure de I_m (ou I_{eff}) :
 - Mesure à l'oscilloscope : On utilise « math » pour obtenir la tension aux bornes de la résistance R_c : $u_{Rc}(t) = e(t) - u(t)$. Puis, on mesure U_{Rcm} (ou U_{Rceff}) à l'aide de « mesure » et on en déduit :

$$I_m = \frac{U_{Rcm}}{R_c} \text{ (ou } I_{eff} = \frac{U_{Rceff}}{R_c} \text{)}$$

- Mesure à l'ampèremètre (voir figure 2) : mode AC (ou AC+DC) on obtient directement I_{eff} .

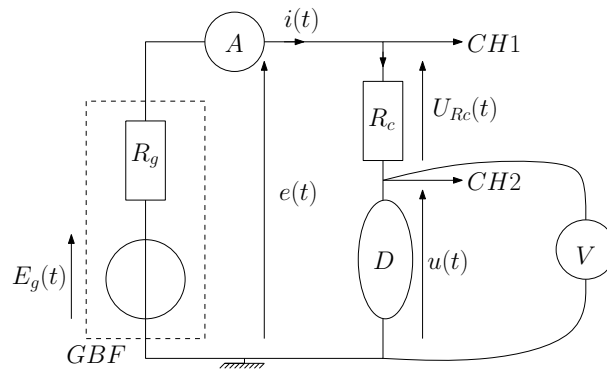


FIGURE 2 – Utilisation de multimètres pour déterminer U_{eff} et I_{eff}

- ✘ Mesure de $\phi = \phi_u - \phi_i$: On utilise « math » pour obtenir la tension aux bornes de la résistance R_c : $u_{Rc}(t) = e(t) - u(t)$.

— On peut alors mesurer le déphasage de $u(t)$ par rapport à $u_{Rc}(t)$ en utilisant le décalage τ dans les temps des deux courbes :

$$\phi = \frac{2\pi\tau}{T} = 2\pi\tau f = \omega\tau$$

Puis on détermine le signe de ϕ à partir des positions relatives des deux courbes.

— On peut également mesurer automatiquement ϕ (option dans « mesure »). Si le déphasage varie de manière significative (mesure très sensible au rapport signal/bruit), on peut utiliser le moyennage (dans « affichage »). Penser à vérifier la cohérence de la valeur affichée !!

- ✘ Choix de R_c :

— En continu, ou a TBF, on a :

$$u(t) = \frac{R}{R + R_c} e(t)$$

Pour obtenir une tension $u(t)$ significative, on a intérêt à choisir R_c de l'ordre de grandeur de R .

— Quand on augmente la fréquence, on obtient :

$$\underline{U_{Rc}} = \frac{R_c}{R + R_c + jL\omega} E$$

Ainsi, plus la fréquence augmente, plus la tension U_{Rcm} diminue : on a donc intérêt à augmenter R_c quand les fréquences deviennent très importantes.

- ✘ Exemple de table de calcul dans LAVIS-PRO :

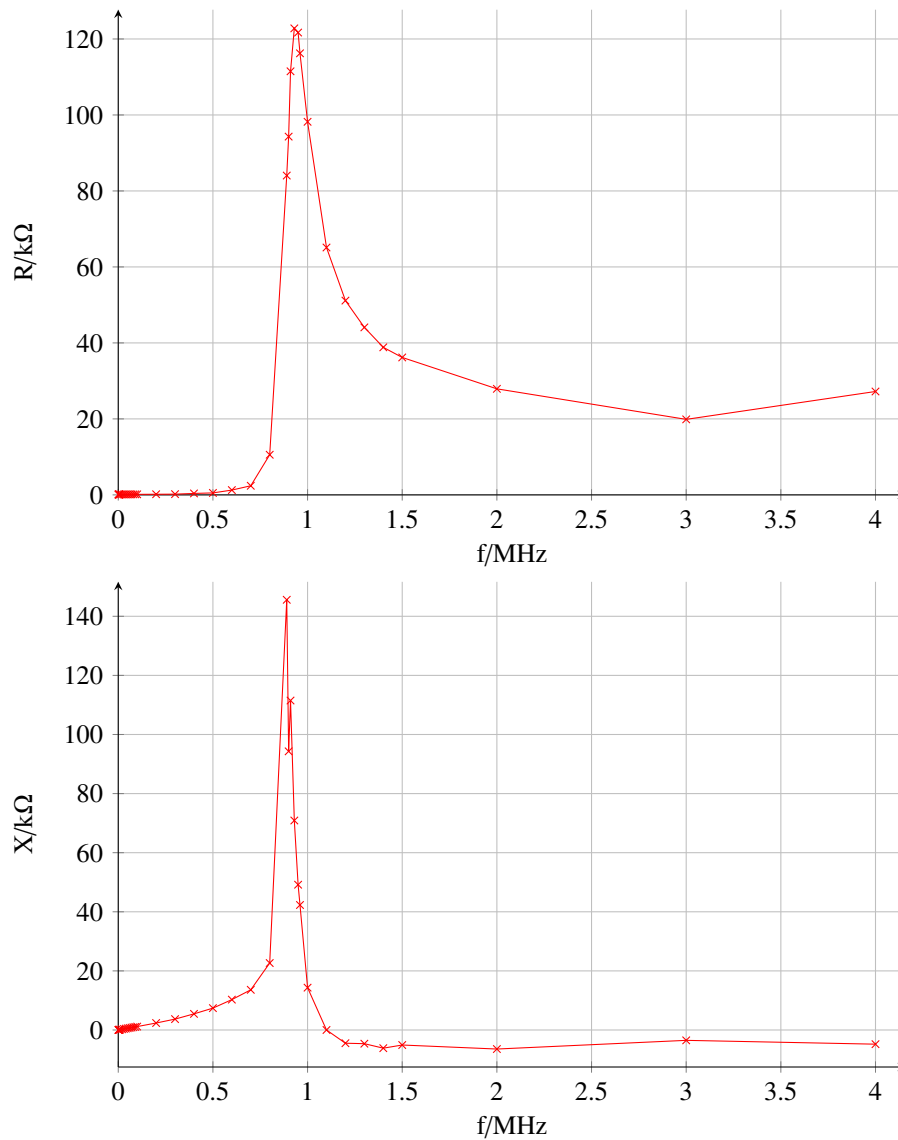
$$\phi_{rad} = \frac{\pi}{180} \phi_{deg}$$

$$R = R_c \frac{U_m}{U_{Rcm}} \cos \phi_{rad}$$

$$X = R_c \frac{U_m}{U_{Rcm}} \sin \phi_{rad}$$

- ✘ Exemple de résultats :

	R' Ω	f Hz	UR V	U V	phi	R Ω	X Ω
0	500,0	1000	7,730	1,600	8,300	102,4	14,94
1	500,0	2000	7,700	1,640	15,00	102,9	27,56
2	500,0	3000	7,690	1,700	21,00	103,2	39,61
3	500,0	4000	7,660	1,770	26,00	103,8	50,65
4	500,0	5000	7,630	1,890	31,00	106,2	63,79
5	500,0	$1,000 \cdot 10^4$	7,550	2,480	49,00	107,8	124,0
6	500,0	$2,000 \cdot 10^4$	7,170	3,840	65,00	113,2	242,7
7	500,0	$3,000 \cdot 10^4$	6,680	5,040	72,00	116,6	358,8
8	500,0	$4,000 \cdot 10^4$	6,180	6,030	76,00	118,0	473,4
9	500,0	$5,000 \cdot 10^4$	5,670	6,820	78,00	125,0	588,3
10	500,0	$6,000 \cdot 10^4$	5,200	7,390	79,00	135,6	697,5
11	500,0	$7,000 \cdot 10^4$	4,760	7,880	81,00	129,5	817,5
12	500,0	$8,000 \cdot 10^4$	4,380	8,230	82,00	130,8	930,4
13	500,0	$9,000 \cdot 10^4$	4,040	8,470	82,30	140,5	1039
14	500,0	$1,000 \cdot 10^5$	3,740	8,720	83,00	142,1	1157
15	500,0	$2,000 \cdot 10^5$	2,040	9,650	86,00	165,0	2359
16	500,0	$3,000 \cdot 10^5$	1,330	9,810	87,00	193,0	3683
17	500,0	$4,000 \cdot 10^5$	0,9100	9,960	86,00	381,8	5459
18	500,0	$5,000 \cdot 10^5$	0,6700	9,940	86,00	517,5	7400
19	500,0	$6,000 \cdot 10^5$	0,4800	9,940	83,00	1262	$1,028 \cdot 10^4$
20	500,0	$7,000 \cdot 10^5$	0,3600	9,940	80,00	2397	$1,360 \cdot 10^4$
21	500,0	$8,000 \cdot 10^5$	0,2000	10,00	65,00	$1,057 \cdot 10^4$	$2,266 \cdot 10^4$
22	$1,000 \cdot 10^4$	$8,900 \cdot 10^5$	0,5800	9,750	60,00	$8,405 \cdot 10^4$	$1,456 \cdot 10^5$
23	$1,000 \cdot 10^4$	$9,000 \cdot 10^5$	0,5900	9,700	55,00	$9,430 \cdot 10^4$	$9,430 \cdot 10^4$
24	$1,000 \cdot 10^4$	$9,100 \cdot 10^5$	0,6000	9,630	46,00	$1,115 \cdot 10^5$	$1,115 \cdot 10^5$
25	$1,000 \cdot 10^4$	$9,300 \cdot 10^5$	0,6700	9,500	30,00	$1,228 \cdot 10^5$	$7,090 \cdot 10^4$
26	$1,000 \cdot 10^4$	$9,500 \cdot 10^5$	0,7200	9,450	22,00	$1,217 \cdot 10^5$	$4,917 \cdot 10^4$
27	$1,000 \cdot 10^4$	$9,600 \cdot 10^5$	0,7600	9,400	20,00	$1,162 \cdot 10^5$	$4,230 \cdot 10^4$
28	$1,000 \cdot 10^4$	$1,000 \cdot 10^6$	0,9220	9,150	8,300	$9,820 \cdot 10^4$	$1,433 \cdot 10^4$
29	$1,000 \cdot 10^4$	$1,100 \cdot 10^6$	1,350	8,790	0,000	$6,511 \cdot 10^4$	0,000
30	$1,000 \cdot 10^4$	$1,200 \cdot 10^6$	1,650	8,470	-5,00	$5,114 \cdot 10^4$	-4474
31	$1,000 \cdot 10^4$	$1,300 \cdot 10^6$	1,870	8,290	-6,00	$4,409 \cdot 10^4$	-4634
32	$1,000 \cdot 10^4$	$1,400 \cdot 10^6$	2,060	8,100	-9,00	$3,884 \cdot 10^4$	-6151
33	$1,000 \cdot 10^4$	$1,500 \cdot 10^6$	2,190	8,000	-8,00	$3,617 \cdot 10^4$	-5084
34	$1,000 \cdot 10^4$	$2,000 \cdot 10^6$	2,653	7,600	-13,0	$2,791 \cdot 10^4$	-6444
35	$1,000 \cdot 10^4$	$3,000 \cdot 10^6$	3,498	7,060	-10,0	$1,988 \cdot 10^4$	-3505
36	$1,000 \cdot 10^4$	$4,000 \cdot 10^6$	2,895	8,000	-10,0	$2,721 \cdot 10^4$	-4799
37	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000



2 Modélisation BF

2.1 Calculs

1. Il s'agit de la résistance d'un conducteur cylindrique de longueur L , de rayon r_0 et de conductivité σ_0 :

$$R_0 = \frac{L}{\sigma_0 S} = \frac{L}{\sigma_0 \pi r_0^2}$$

- 2.

$$dR = \frac{L}{\sigma(r) \times 2\pi r dr}$$

$$dG = \frac{\sigma(r) \times 2\pi r dr}{L} = \frac{2\pi\sigma_0}{L} r \exp\left(\frac{r-r_0}{\delta}\right) dr$$

$$G = \frac{2\pi\sigma_0}{L} \int_0^{r_0} r \exp\left(\frac{r-r_0}{\delta}\right) dr$$

On fait une intégration par partie en posant : $u = r$ et $v' = \exp\left(\frac{r-r_0}{\delta}\right)$. On trouve alors :

$$G = \frac{2\pi\sigma_0}{L} \left[r_0 \delta - \delta^2 \left(\exp\left(\frac{-r_0}{\delta}\right) - 1 \right) \right]$$

D'où :

$$R = \frac{L}{2\pi\sigma_0} \frac{1}{\left[r_0\delta - \delta^2 \left(\exp\left(\frac{-r_0}{\delta}\right) - 1 \right) \right]} = \frac{R_0}{2} \frac{r_0^2}{\left[r_0\delta - \delta^2 \left(\exp\left(\frac{-r_0}{\delta}\right) - 1 \right) \right]}$$

Sachant que :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\sigma_0\pi f}}$$

On obtient :

$$R(f) = \frac{R_0}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a\sqrt{f}} + \frac{1}{a^2 f} \left(\exp(-a\sqrt{f}) - 1 \right)}$$

Où :

$$a = r_0 \sqrt{\pi\sigma_0\mu_0}$$

2.1.1 Exploitation de $R(f)$

- ✗ Dans cette question, on étudie la partie réelle de \underline{Z} (résistance) sur une plage de fréquence correspondant à des BF (de quelques Hz à qq kHz) afin de vérifier que le modèle de l'effet de peau fonctionne.
- ✗ Le graphe obtenu est représenté figure 3.
- ✗ On modélise la courbe obtenue en utilisant la formule de la question 2. On obtient la courbe représentée figure3.

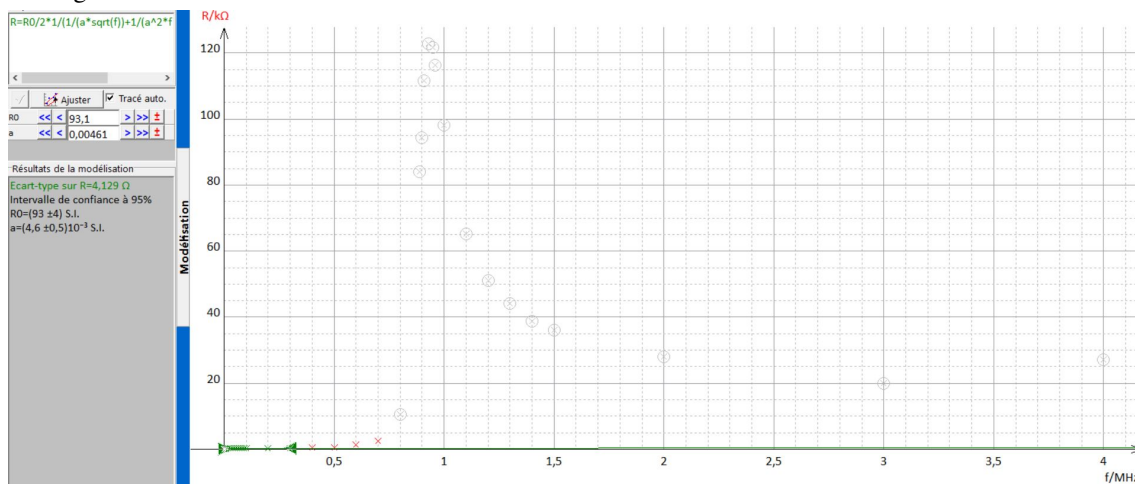


FIGURE 3 – Etude de l'effet de peau

Avec :

$$R_0 = 93 \pm 4 \Omega$$

$$a = (4.6 \pm 0.5) \times 10^{-3} \text{SI}$$

- ✗ On compare la valeur trouvée à celle donnée par l'Ohmmètre :

$$R_{\text{pont}} = R_{\text{lue}}$$

$$u_{R_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} (a\%R_{\text{lue}} + b \times \text{digit})$$

(a et b sont données dans la documentation constructeur).

On en déduit :

$$R_{\text{pont}} = R_{\text{lue}} \pm k u_R$$

($k = 2$, pour une incertitude à 95%).

- ✗ Il faudrait avoir le diamètre du fil conducteur.

2.1.2 Exploitation $X(f)$

- ✘ D'après la modélisation proposée, on a : $\underline{Z} = R + jL\omega$ et donc $Re(\underline{Z}) = R = cste$ et $Im(\underline{Z}) = X = 2\pi Lf$.
D'où l'allure des graphes donnés figure 4



FIGURE 4 – Allure des courbes attendues pour $R(f)$ et $X(f)$

- ✘ On peut donc mesurer L en déterminant la pente de la droite obtenue sur la courbe $X(f)$.
- ✘ Pour déterminer la valeur de L , on effectue une régression linéaire sur la première partie de la courbe de la figure 5 (située avant la résonance) comme indiqué figure 5.

On obtient :

$$X = af + b \text{ avec } : a = 4.9 \pm 0.6 \times 10^{-3} \text{ avec } r = 0.947$$

On en déduit :

$$L = 0.78 \text{ mH et } \frac{u_L}{L} = \frac{u_a}{a} \Rightarrow u_L = 0.09 \text{ mH}$$

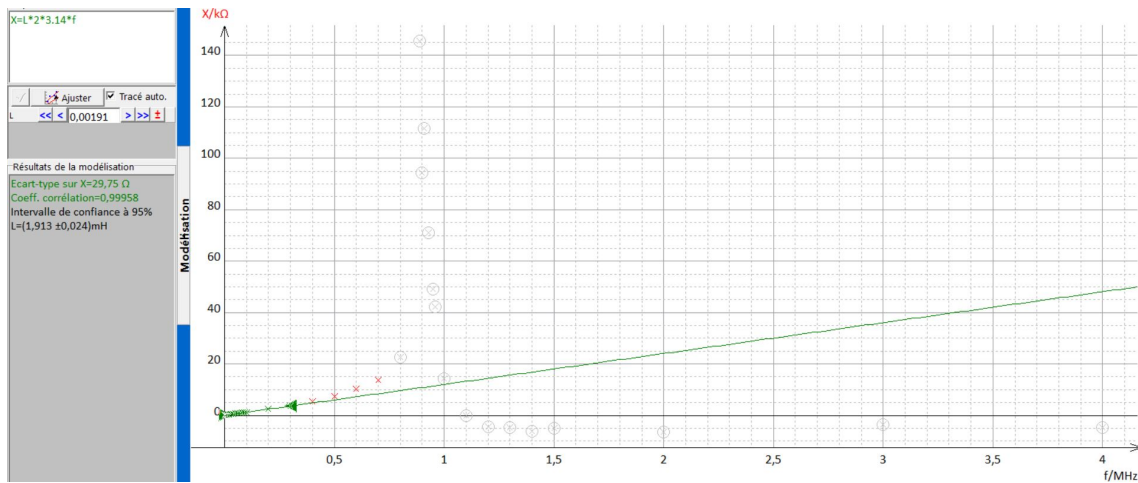


FIGURE 5 – Regression linéaire pour obtenir L

3 Modélisation large bande

- ✘ D'après la modélisation proposée, on a :

$$\underline{Z} = \frac{(R + jL\omega) \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{(R + jL\omega)(1 - jRC\omega - LC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

Soit :

$$\underline{Z} = R \left(\frac{1}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \right) + jL\omega \left(\frac{1 - LC\omega^2 - \frac{R^2C}{L}}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \right)$$

D'où :

$$R_{th}(\omega) = \frac{R}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

$$X_{th}(\omega) = L\omega \frac{1 - LC\omega^2 - \frac{R^2C}{L}}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

- ✘ L'expression de $R(f)$ est de la forme d'un filtre passe-bas du second ordre : la pulsation de résonance est de la forme :

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

où (RLC série) :

$$\omega_0 = \sqrt{LC}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

D'où :

$$C = \frac{2L}{R^2 + 2L^2(2\pi f_{res})^2}$$

- ✘ On réalise alors le code python demandé (en exportant les données saisies sous forme de fichier Regressi) :

```

# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Extraction de données d'un fichier CSV. Ces données étant présentées en colonnes
import csv #on importe le module csv

#On crée un tableau dans lequel on va mettre les valeurs contenues
# ... dans le CSV présenté en colonne
tableau0=[]

with open('rheostat5.csv') as f: #Ouverture du fichier CSV
    #chargement des lignes du fichier csv
    lire=csv.reader(f,delimiter=',')
    for ligne in lire: #Pour chaque ligne...
        #print(ligne, end='\n') #...affichage de la ligne dans la console
        tableau0.append(ligne) #...on ajoute la ligne dans la liste ...
        #...de liste nommée tableau

#On obtient la liste des lignes du tableau
print('Initialement, la variable tableau est égale à :\n',tableau0)

#On crée une fonction qui permet d'obtenir les colonnes du tableau CSV

def Colonne_Ligne(tab):
    nb_ligne=len(tab)
    nb_col=len(tab[0])
    tab_ligne=[]
    for i in range(nb_col):
        ligne=[]
        for j in range(nb_ligne):
            ligne.append(tab[j][i])
        tab_ligne.append(ligne)
    return tab_ligne

#On crée une fonction qui va transformer les colonnes du fichier CSV de manière ...
# ... à ce que les valeurs numériques saisies dans le tableur ...
# ...soient des variables de type float dans la liste Python

def Transforme_Ligne(lgn):
    n=len(lgn) # la taille de la liste est n
    for i in range(n):
        # On doit donc remplacer la virgule par un point
        lgn[i]=lgn[i].replace(',','.')
        #Puis on convertit cette chaîne de caractère en float
        lgn[i]=float(lgn[i])
    return lgn

#La fonction suivante transforme maintenant toutes les lignes de la variable tableau
...
#...de manière à ce que l'on puisse traiter les données.

def Creation_Tableau(tab):
    m=len(tab)
    for i in range(m):
        tab[i]=Transforme_Ligne(tab[i])
    return tab

#On met les colonnes du tableau CSV dans un tableau
tableau1=Colonne_Ligne(tableau0)
print('on met les colonnes du tableau initiale en ligne\n',tableau1)

#On transforme les valeurs qui sont des string et qui ont des virgules ...
# ...en valeurs numériques avec des points comme séparateur décimal
tableau2=Creation_Tableau(tableau1)

print(tableau2)

```

```

f=np.array(tableau2[1])
print(f)

logf=np.log10(f)
print(logf)

Rexp=np.array(tableau2[5])
print(Rexp)

Xexp=np.array(tableau2[6])
print(Xexp)

f_res=10**(5.97)
L=1.913*10**(-3)
R0=93
R_res=270
a=0.0046
C=2*L/(R_res**2+L**2*(2*np.pi*f_res)**2)
print(C)

def Rtheorique(f,R0,a,L,C):
    return ((R0/2)/(1/(a*np.sqrt(f))+np.exp(-a*np.sqrt(f)-1)/(f*a**2)))/((1-L*C*(2*np.pi*f)**2)**2+((R0/2)/1/(a*np.sqrt(f))+np.exp(-a*np.sqrt(f)-1)/(f*a**2))*C**2*np.pi*f**2)

def Xtheorique(f,R0,a,L,C):
    return L**2*np.pi**2*(1-L*C*(2*np.pi*f)**2-((R0/2)/(1/(a*np.sqrt(f))+np.exp(-a*np.sqrt(f)-1)/(f*a**2)))*C**2*np.pi*f**2)/((1-L*C*(2*np.pi*f)**2)**2+((R0/2)/1/(a*np.sqrt(f))+np.exp(-a*np.sqrt(f)-1)/(f*a**2))*C**2*np.pi*f**2)

Rth=Rtheorique(f,R0,a,L,C)
Xth=Xtheorique(f,R0,a,L,C)

plt.figure("Partie réelle")
plt.plot(logf, Rth, 'b-', label='th')
plt.plot(logf, Rexp, 'r-', label='exp')
plt.legend()

plt.figure("Partie imaginaire")
plt.plot(logf, Xth, 'b-', label='th')
plt.plot(logf, Xexp, 'r-', label='exp')
plt.legend()

```


✘ On obtient :

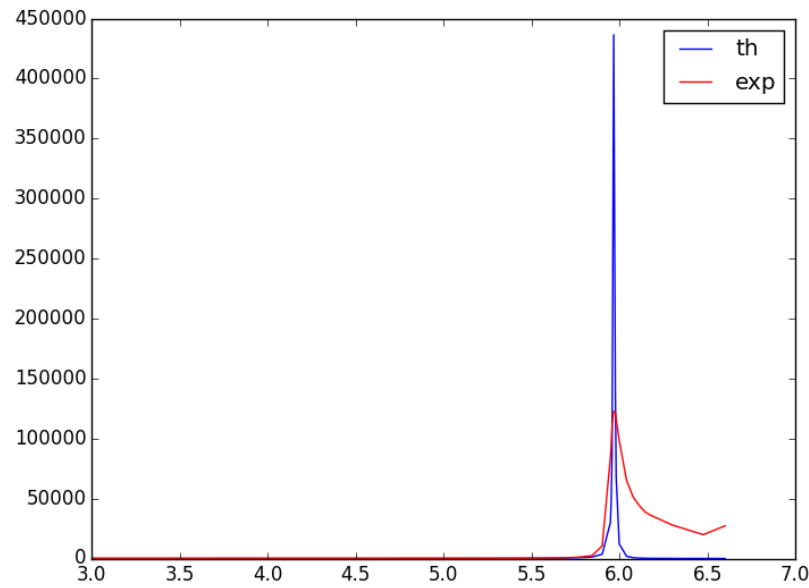


FIGURE 6

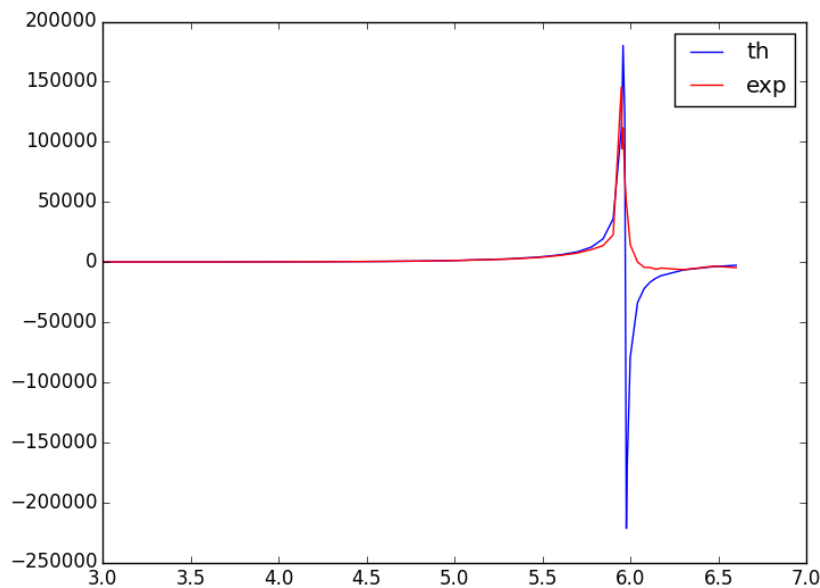


FIGURE 7

On peut conclure que la modélisation large bande n'est pas adaptée.

✘ autre méthode pour déterminer C :

— On voit donc que, lorsque ω tend vers l'infini, \underline{Z} tend vers $\frac{1}{jC\omega}$

Ainsi quand f tend vers l'infini, X tend vers $-\frac{1}{2\pi Cf}$

— On peut donc effectuer une modélisation de la partie de la courbe située après la résonance (figure 5), modélisation de la forme : $X = -\frac{a}{f}$ (avec $a = \frac{1}{2\pi C}$) comme indiqué figure 8.

On obtient :

$$X = -\frac{a}{f} \text{ avec } : a = 5.8 \pm 0.6 \times 10^9 \text{ avec } r = 0.946$$

On en déduit :

$$C = 27 \text{ pF et } \frac{u_c}{C} = \frac{u_a}{a} \Rightarrow u_c = 3 \text{ pF}$$

— Notons que l'on peut également tracer X en fonction de $\frac{1}{f}$: on obtiendra une droite de pente $-\frac{1}{2\pi C}$.

On peut alors en déduire la valeur de C .

— Notons enfin que l'on peut déterminer la pulsation propre du système :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1.1 \text{ MHz et } \frac{u_{\omega_0}}{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2} \Rightarrow u_{\omega_0} = 0.2 \text{ MHz}$$

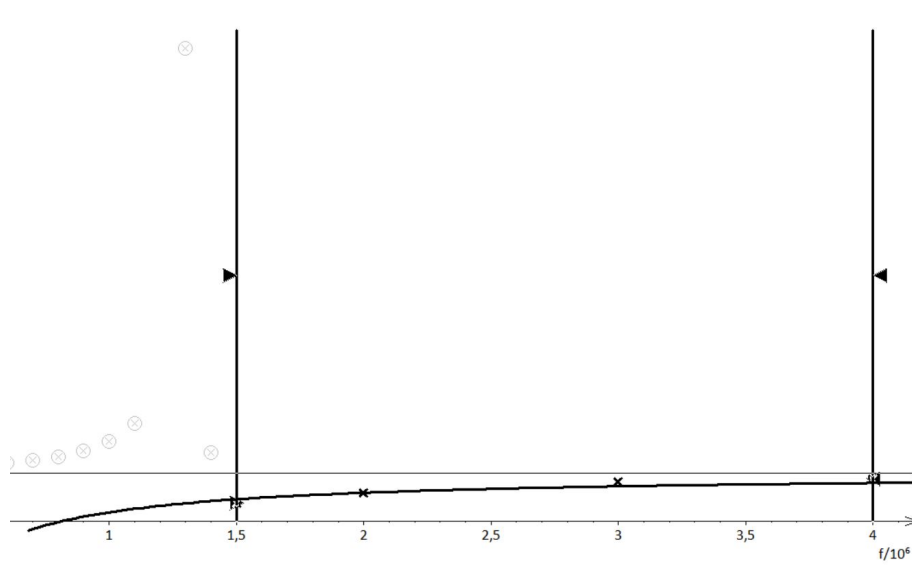


FIGURE 8 – Modélisation pour obtenir C