

TP5 - Électronique numérique : échantillonnage d'un signal et filtrage numérique d'un signal échantillonné

1 Spectres comparés d'un signal et de son signal échantillonné plus ou moins idéalement (Poste 1)

Pour échantillonner le signal $V_A(t)$, on le multiplie par un peigne de Dirac "réel" c'est à dire un peigne dont les impulsions sont de largeur non nulle (durée τ). A la sortie du multiplieur, on obtient le signal $V_e(t)$ dont le spectre $E(f)$ est le produit de convolution du spectre de $V_A(t)$ et de $\Pi_{f_e}(f)$. La figure 1 représente le cas d'un échantillonnage idéal et la figure 2 représente le cas d'un échantillonnage réel.

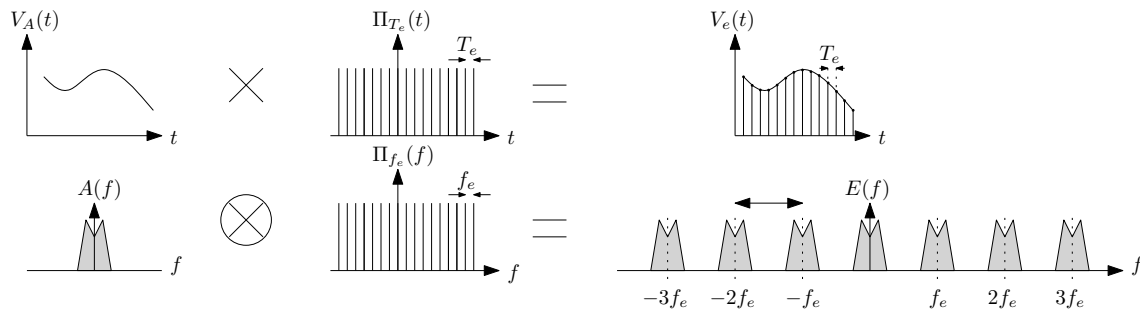


FIGURE 1 – Échantillonnage idéal

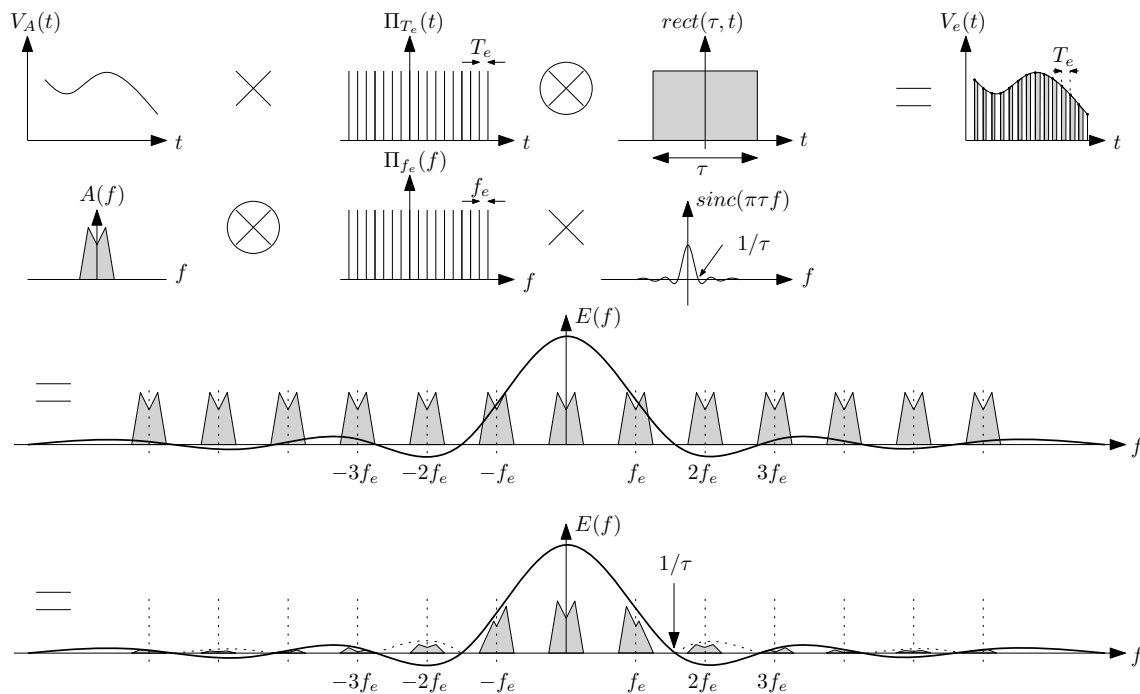


FIGURE 2 – Échantillonnage réel

✓ Le montage réalisé est indiqué figure 3.

✓ Le peigne utilisé est de fréquence $f_e = 1/T_e$, d'amplitude 2.5 V et de rapport cyclique α tel que $\tau = \alpha T_e$.
Par exemple pour $f_e = 2 \text{ kHz}$, $\tau = 27 \mu\text{s}$.

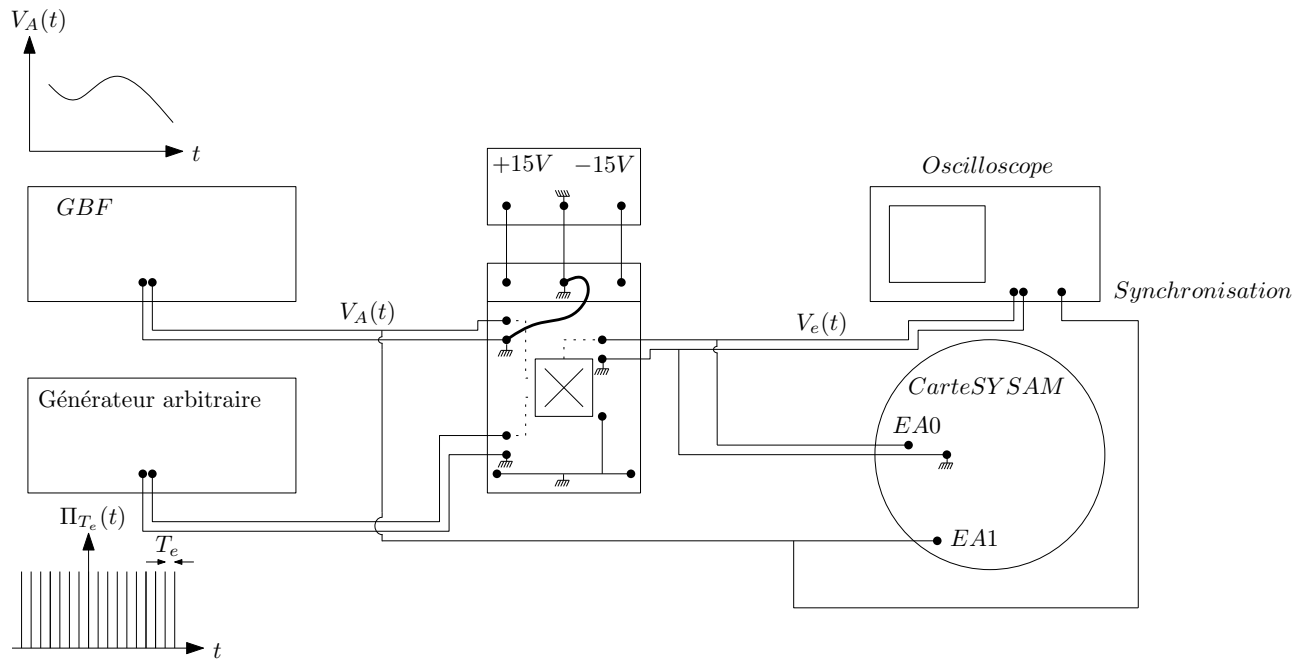


FIGURE 3 – Montage

- ✓ Attention : le peigne ne doit pas faire intervenir de valeurs négatives : il faut donc veiller à ce que sa valeur minimale soit égale à 0V : pour cela on observe $\Pi_{T_e}(t)$ à l'oscilloscope et, dans les mesures, on affiche V_{min} . On règle ensuite l'offset sur le générateur arbitraire afin que V_{min} soit bien égale à 0V.
- ✓ Pour l'acquisition avec la carte SYSAM, il faut faire attention à la CAN effectuée par la carte elle-même : si l'on note f_{max} la fréquence maximale du signal $V_e(t)$, alors la fréquence d'échantillonnage choisie dans le logiciel LATIS-PRO doit vérifier : $f'_e > 2f_{max}$. De plus, si l'on veut que le spectre obtenu soit de bonne qualité, il faut que le temps d'acquisition Δt soit "suffisamment grand" c'est à dire qu'il contienne un grand nombre de période du signal $V_e(t)$.
- ✓ Pour la visualisation de $V_e(t)$ à l'oscilloscope, on synchronise à l'aide du signal $V_A(t)$: soit directement sur une voie, soit à l'aide de la synchronisation extérieure.

1.1 Échantillonnage "idéal"

- ✓ le signal à échantillonner est :
 - Soit un signal sinusoïdal de la forme $V_A(t) = A \cos(2\pi ft)$ avec $f = 2 \text{ kHz}$ et $A = 6 \text{ V}$. Son spectre est donné figure 4.
 - Soit un signal crête à crête de la forme $V_A(t) = \frac{8A}{\Pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{(2k+1)^2}$ avec $f = 2 \text{ kHz}$ et $A = 6 \text{ V}$. Son spectre est donné figure 5.

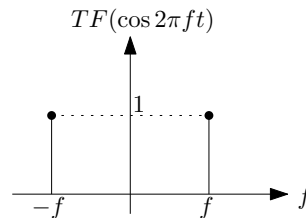


FIGURE 4 – Spectre de la fonction cosinus

- ✓ Sachant que $f = 2 \text{ kHz}$, on a $T = 500 \mu\text{s}$. Afin d'augmenter la précision sur le spectre, on choisit donc : $\Delta t = 10T = 5 \text{ ms}$.

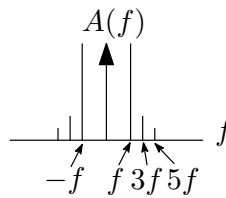


FIGURE 5 – Spectre de la fonction triangle

- ✓ Le spectre attendu dépend de la fréquence d'échantillonnage et de la valeur de τ comme indiqué précédemment.
- ✓ En supposant que l'on souhaite observer le spectre dupliqué jusqu'à nf_e , alors, la fréquence d'échantillonnage soit vérifier : $f'_e > 2(nf_e + f_{max})$.
- ✓ Notons que cette observation est possible si $\frac{1}{\tau} = \frac{f_e}{\alpha} > nf_e + f_{max}$.

Soit :

$$\alpha < \frac{1}{n} + \frac{f_{max}}{f_e}.$$

Exemple pour $f_{max} \ll f_e$ et donc pour $\alpha < \frac{1}{n}$:

n	α_{max}
1	100%
2	50%
3	33%
4	25%
5	12.5%
18	5.4%

Étude des différents cas :

Fonction	$f(\text{Hz})$	$f_{max}(\text{Hz})$	$f_e(\text{Hz})$	Shannon	α	$\tau(\text{s})$	n	$f'_{e,min}$	f'_e	Δt	N
sinus	2 kHz	2 kHz	20 kHz	oui	5.4%	$2.7 \mu\text{s}$	18	724 kHz	1000 kHz	5 ms	5000
sinus	2 kHz	2 kHz	4 kHz	limite	5.4%	$13.5 \mu\text{s}$	18	148 kHz	500 kHz	5 ms	2500
sinus	2 kHz	2 kHz	3 kHz	non	5.4%	$18 \mu\text{s}$	18	112 kHz	500 kHz	5 ms	2500
triangle	2 kHz	10 kHz	20 kHz	oui	5.4%	$2.7 \mu\text{s}$	17	720 kHz	1000 kHz	5 ms	5000
triangle	2 kHz	10 kHz	10 kHz	non	5.4%	$5.4 \mu\text{s}$	16	360 kHz	1000 kHz	5 ms	5000
triangle	2 kHz	10 kHz	5 kHz	non	5.4%	$11 \mu\text{s}$	14	180 kHz	500 kHz	5 ms	2500
triangle	2 kHz	10 kHz	3 kHz	non	5.4%	$18 \mu\text{s}$	11	106 kHz	500 kHz	5 ms	2500

Exploitation des graphes :

- ✓ Cas d'une fonction sinusoïdale :

— Lorsque le critère de Shannon est vérifié, le signal est correctement échantillonné. Le spectre obtenu est représenté figure 6. On vérifie que toutes les raies apparaissant dans le spectre correspondent bien à ce qui est attendu.

Pour $f_e = 20 \text{ kHz}$; $f = 2 \text{ kHz}$, les fréquences des premières raies observées doivent être :

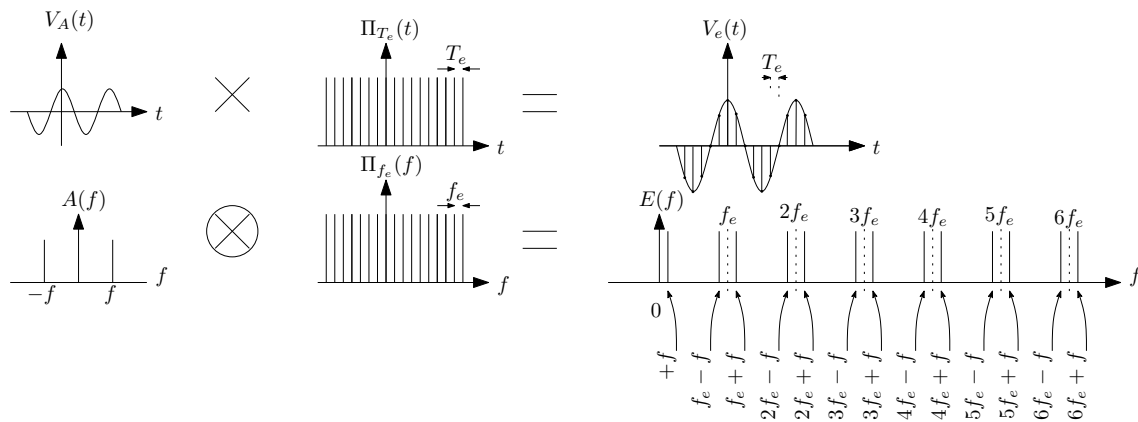


FIGURE 6 – Echantillonnage de la fonction cosinus, critère de Shannon vérifié

Raie attendue	Valeur numérique
f	2 kHz
$f_e - f$	18 kHz
$f_e + f$	22 kHz
$2f_e - f$	38 kHz
$2f_e + f$	42 kHz
$3f_e - f$	58 kHz
$3f_e + f$	62 kHz
$4f_e - f$	78 kHz
$4f_e + f$	82 kHz
$5f_e - f$	98 kHz
$5f_e + f$	102 kHz
$6f_e - f$	118 kHz
$6f_e + f$	122 kHz

— Lorsque l'on est à la limite du critère de Shannon ($f_e = 2f$), on obtient le spectre donné par la figure 7. Notons que dans ce cas là, on a des coïncidences de raies :

$$nf_e - f = nf_e - 2f + f = (n-1)f_e + f \rightarrow \text{Les raies } nf_e - f \text{ et } (n-1)f_e + f \text{ coïncident}$$

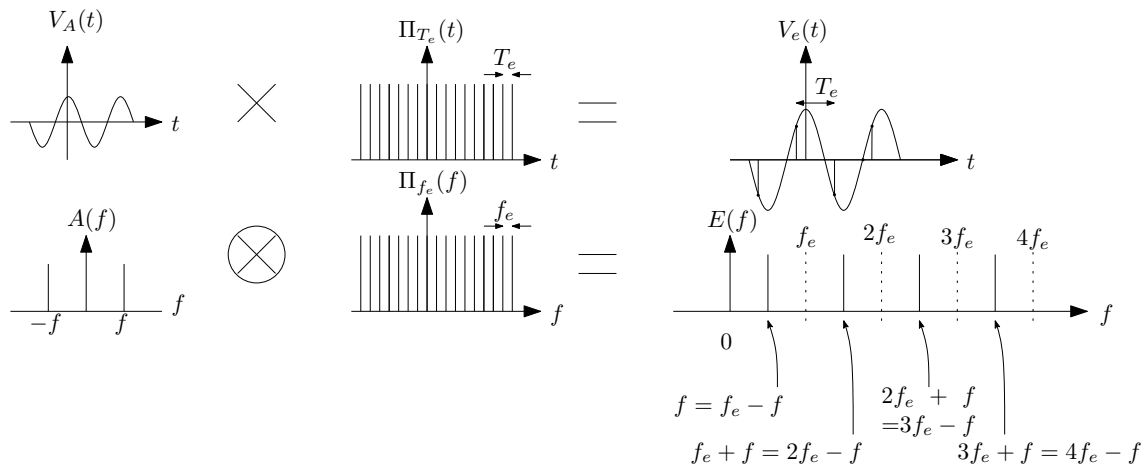


FIGURE 7 – Echantillonnage de la fonction cosinus, limite du critère de Shannon

— Lorsque le critère de Shannon n'est pas vérifié, on observe un recouvrement de spectre : le spectre initial du signal est dénaturé. Dans le cas où $f_e = 3\text{ kHz}$; $f = 2\text{ kHz}$, les raies observées dans le spectre se positionnent comme suit :

Raie attendue	Valeur numérique
f	2 kHz
$f_e - f$	1 kHz
$f_e + f$	5 kHz
$2f_e - f$	4 kHz
$2f_e + f$	8 kHz

On vérifie sur le spectre obtenu, la présence de ces raies.

✓ Cas d'un signal triangulaire.

- Le signal $V_A(t)$ contient ici de nombreuses fréquences : sachant que la décroissance des harmoniques est en $1/n^2$, on tient compte uniquement des trois premières fréquences dans le spectre de $V_A(t)$: la fréquence maximale du signal à échantillonner est donc $f_{max} = 5f = 10$ kHz. Ce qui donne, pour le respect du critère de Shannon : $f_e > 20$ kHz ! Ainsi, seule la première fréquence proposée convient (et encore, on se situe à la limite du critère).
- Plaçons-nous dans le cas où le critère de Shannon est vérifié ($f_e > 20$ kHz). On obtient alors le spectre obtenu est représenté figure 8.

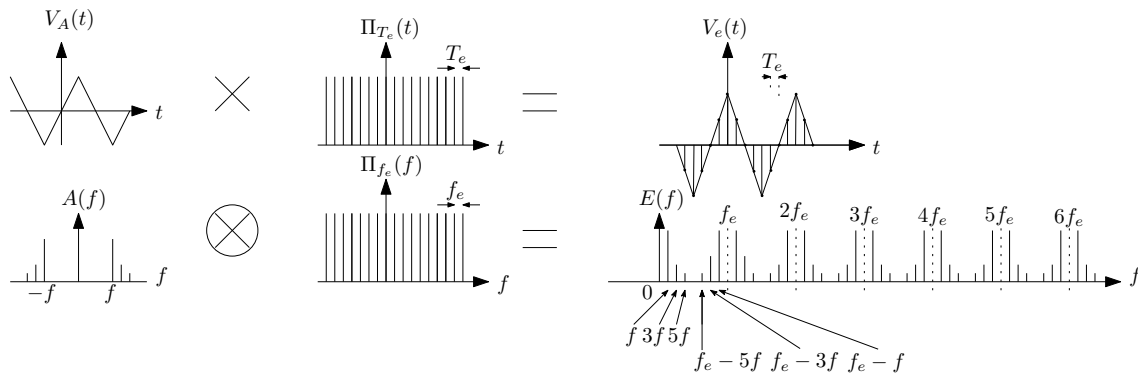


FIGURE 8 – Échantillonnage de la fonction cosinus, critère de Shannon vérifié

- A la limite du critère de Shannon ($f_e = 20$ kHz), les raies observées dans le spectre se positionnent comme suit :

Raie attendue	Valeur numérique
f	2 kHz
$3f$	6 kHz
$5f$	10 kHz
$f_e - 5f$	10 kHz
$f_e - 3f$	16 kHz
$f_e - f$	18 kHz

On a donc encore une fois coïncidence des raies, et plus précisément des raies $nf_e - 5f$ et $(n-1)f_e + 5f$.

- Pour $f_e < 20$ kHz, le critère de Shannon n'est pas vérifié : il peut y avoir des coïncidences et des anti-coïncidences (à cause du $(-1)^n$ dans l'expression de $V_A(t)$).
- Attention ! Lorsque $f_e - kf < 0$, il faut prendre en compte le repliement des raies venant de $-f_e + kf$: Ces raies n'apparaissent normalement pas dans le spectre, mais dans ce cas elle interviennent car $-f_e + kf > 0$!!
- Le tableau suivant présentent les raies attendues dans l'intervalle $[0, 2f_e + kf]$:

$f_e = 10 \text{ kHz} ; f = 2 \text{ kHz}$		$f_e = 5 \text{ kHz} ; f = 2 \text{ kHz}$		$f_e = 3 \text{ kHz} ; f = 2 \text{ kHz}$	
Raie attendue	Valeur numérique	Raie attendue	Valeur numérique	Raie attendue	Valeur numérique
f	2 kHz	f	2 kHz	f	2 kHz
$3f$	6 kHz	$3f$	6 kHz	$3f$	6 kHz
$5f$	10 kHz	$5f$	10 kHz	$5f$	10 kHz
$f_e - 5f$	0 kHz	$f_e - 5f$	5 kHz $\checkmark$	$f_e - 5f$	7 kHz $\checkmark$
$f_e - 3f$	4 kHz	$f_e - 3f$	1 kHz $\checkmark$	$f_e - 3f$	3 kHz $\checkmark$
$f_e - f$	8 kHz	$f_e - f$	3 kHz	$f_e - f$	1 kHz
$f_e + f$	12 kHz	$f_e + f$	7 kHz	$f_e + f$	5 kHz
$f_e + 3f$	16 kHz	$f_e + 3f$	11 kHz	$f_e + 3f$	9 kHz
$f_e + 5f$	20 kHz	$f_e + 5f$	15 kHz	$f_e + 5f$	13 kHz
$2f_e - 5f$	10 kHz	$2f_e - 5f$	0 kHz	$2f_e - 5f$	4 kHz $\checkmark$
$2f_e - 3f$	14 kHz	$2f_e - 3f$	4 kHz	$2f_e - 3f$	0 kHz
$2f_e - f$	18 kHz	$2f_e - f$	8 kHz	$2f_e - f$	4 kHz
$2f_e + f$	22 kHz	$2f_e + f$	12 kHz	$2f_e + f$	8 kHz
$2f_e + 3f$	26 kHz	$2f_e + 3f$	16 kHz	$2f_e + 3f$	12 kHz
$2f_e + 5f$	30 kHz	$2f_e + 5f$	20 kHz	$2f_e + 5f$	16 kHz

— Les cases contenant $\checkmark$, correspondent à des fréquences venant de $-f_e$.

— On constate la présence de coïncidences mais pas d'anti-coïncidences.

1.2 Influence de la largeur de l'impulsion

$\checkmark$ On fait ici varier α et on vérifie la cohérence des résultats : pour α fixé, le nombre de fois que le spectre est dupliqué (n) est :

$$n = \frac{1}{\alpha} - \frac{f_{\max}}{f_e}$$

$\checkmark$ Le tableau ci-dessous, donne le nombre de répliques observables, dans le cas de l'échantillonnage d'un cosinus (Le critère de Shannon étant vérifié).

Fonction	$f(\text{Hz})$	$f_{\max}(\text{Hz})$	$f_e(\text{Hz})$	Shannon	α	$\tau(\text{s})$	n	$f'_{e,\min}$	f'_e	Δt	N
sinus	2 kHz	2 kHz	20 kHz	oui	5.4%	$2.7 \mu\text{s}$	18	724 kHz	1000 kHz	5 ms	5000
sinus	2 kHz	2 kHz	20 kHz	oui	20%	$10 \mu\text{s}$	≈ 4	164 kHz	500 kHz	5 ms	2500
sinus	2 kHz	2 kHz	20 kHz	oui	50%	$25 \mu\text{s}$	≈ 2	84 kHz	500 kHz	5 ms	2500
sinus	2 kHz	2 kHz	20 kHz	oui	100%	$50 \mu\text{s}$	≈ 1	44 kHz	500 kHz	5 ms	2500

$\checkmark$ La figure 9, illustre les différentes situations rencontrées dans le cas d'un signal triangulaire (cas où le théorème de Shannon est vérifié).

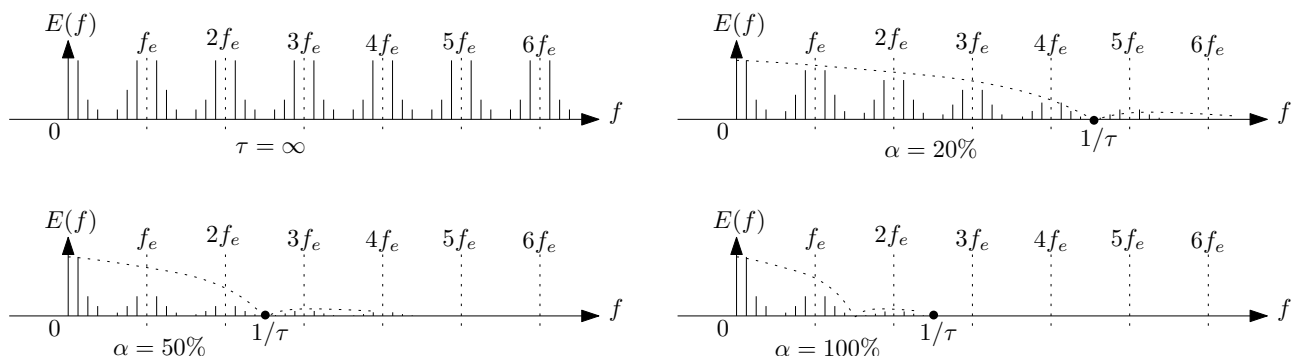


FIGURE 9 – Effet de α sur le spectre du cosinus

2 Étude de la CAN opérée par la carte SYSAM SP5 (Poste 2)

2.1 Réglage possible ou pré-détermination des résolutions

2.2 Mesure d'une résolution verticale : détermination du nombre de bits de codage

Le but de cette partie est de calculer le nombre de bits (n) utilisés pour l'opération de quantification de la carte SYSAM.

- ✓ On commence par choisir le calibre : en cliquant (clic droit) sur les entrées EA0, EA1... Selon le calibre C choisi, cette tension maximale est $[-C; +C]$.
- ✓ On fixe ensuite la durée d'acquisition à $\Delta t = 10$ ms et le nombre de points (échantillons) à $N = 2000 \Rightarrow$ la fréquence d'échantillonnage est $f_e = 200$ kHz.
- ✓ On injecte sur l'entrée de la carte SYSAM, un signal sinusoïdal de fréquence $f = 100$ Hz d'amplitude $V_m = 1$ V (on a bien $f_e > 2f$).
- ✓ Après acquisition, on "zoom" à l'aide de la loupe, afin de déterminer l'écart vertical entre deux points, on obtient q .
- ✓ On récapitule les résultats dans un tableau :

$C(V)$	$q(mV)$	n
10	≈ 5	≈ 12
5	≈ 2.5	≈ 12
1	≈ 0.5	≈ 12
0.2	≈ 0.1	≈ 12

La documentation constructeur montre que la codage s'effectue effectivement en 12 bits.

- ✓ L'établissement de la formule : $n = \frac{\ln\left(\frac{2C}{q} + 1\right)}{\ln 2}$ est évidente, en sachant que $V_m = C$.

2.3 Choisir la fréquence d'échantillonnage

2.3.1 Généralités

- ✓ Lors de l'acquisition d'un signal analogique sur une entrée de la carte, il faut régler les trois paramètres :
 - Le nombre de points, d'échantillons N pris.
 - T_e , la période d'échantillonnage.
 - La durée totale Δt d'acquisition.
- ✓ La relation liant ces trois paramètres est :

$$\Delta t = N \times T_e = \frac{N}{f_e}$$

- ✓ Pour un enregistrement sonore mono-voie fait avec un microphone analogique et la carte SYSAM, de durée 1 min, on choisit les paramètres de la manière suivante :
 - On a directement : $\Delta t = 60$ s.
 - Les fréquences contenues dans le spectre de la voie sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz. La fréquence maximale du spectre à étudier est donc : $f_{max} = 20$ kHz. Le critère de Shannon impose donc : $f_e > 40$ kHz. On peut par exemple choisir : $f_e = 100$ kHz.
 - On obtient alors le nombre de points : $N = \Delta t \times f_e = 6 \times 10^6$ points.
 - L'échantillonnage se faisant sur n bits, on obtient la taille en octet du fichier son :

$$N_{octet} = \frac{N \times n}{8}$$

Par exemple, pour $n = 8$, on obtient $N_{octet} = N$.

2.3.2 Acquisition d'un signal triangulaire

On souhaite faire l'acquisition d'un signal triangulaire impair de pulsation ω de plage de variations $[-E ; E]$ dont la décomposition en série de Fourier est :

$$u_e(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)\omega t.$$

1. Acquisition à nombre de points constant

- ✓ On prend $f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$ et $E = 6 \text{ V}$. Sachant que le signal contient des harmoniques dont la décroissance est en $1/n^2$, on en déduit, en ne gardant que les 3 premiers termes de la décomposition en série de Fourier, que $f_{\max} = 5f = 500 \text{ Hz}$. Le critère de Shannon sera donc vérifié pour $f_e > 1 \text{ kHz}$.
- ✓ On acquiert avec l'entrée EAO; un nombre de points $N = 200$ (constant) et on fait varier f_e : La durée totale d'échantillonnage sera alors $\Delta t = \frac{N}{f_e}$.
- ✓ Afin d'obtenir une bonne résolution dans le tracé du spectre, on veillera à afficher un nombre de périodes suffisant : La période du signal étant $T = 10 \text{ ms}$, on veillera à ce que $\Delta t > 5T = 50 \text{ ms}$.
- ✓ En pratique, on peut se placer dans les trois cas suivants :

$f_e(\text{Hz})$	$\Delta t(\mu\text{s})$	Shannon
5000	1	oui
1000	200	limite
500	400	non

- ✓ La CAN effectuée par la carte SYSAM est telle qu'un filtre (rectangulaire) est appliqué après échantillonnage, de façon à ce que seul le partie positive du spectre centré en 0 apparaisse (pulsation de coupure du filtre supérieure à $\frac{f_e}{2}$).
- ✓ On obtient les spectres donnés par la figure 10.

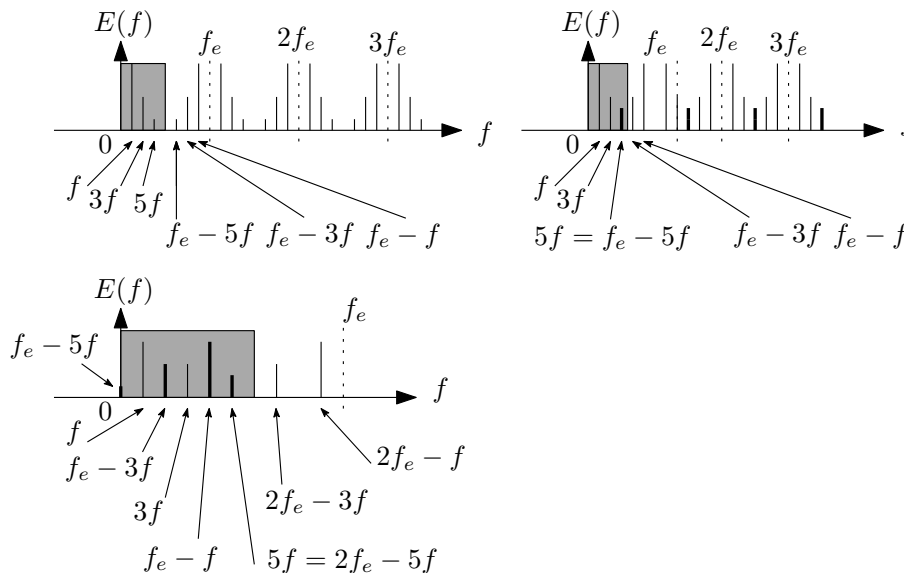


FIGURE 10 – Évolution du spectre en fonction de f_e

Sur le schéma les fréquences apparaissant par repliement de spectre apparaissent en gras. Notons l'existence de quelques coïncidences.

2. Acquisition à durée totale d'acquisition constante

- ✓ On travaille à durée d'échantillonnage constante. Afin d'optimiser le nombre de points, compte tenu de la résolution verticale, on cherche la fréquence maximale d'échantillonnage ($f_{e,\max}$) pour laquelle

deux points successifs auront la même ordonnée (même mot binaire) : le signal étant un triangle, l'égalité des ordonnées viendra du procédé de quantification (par défaut ou centrée) et non de la forme du signal.

- ✓ On prend $f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$ et $E = 1 \text{ V}$ et on fixe $\Delta t = 22 \text{ ms}$ de manière à enregistrer un peu plus de deux périodes du signal acquis.
- ✓ La fréquence maximale théorique de trouve de la manière suivante : Lorsque f_e est égale à $f_{e,max}^-$, Deux points consécutifs ont des ordonnées séparées d'une valeur égale au pas q de quantification. Lorsque f_e est égale à $f_{e,max}^+$, Deux points consécutifs ont des ordonnées égales.
- ✓ On note $u(t)$ le signal échantillonné. La pente du signal en dents de scie (sur une demi-alternance positive) est :

$$p = \frac{2V_m}{T} = 100 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dans le cas limite on aura aussi :

$$p = \frac{q}{T_{emin}} = q \times f_{e,max}$$

D'où :

$$f_{e,max} = \frac{p}{q} \text{ et } N_{max} = \Delta t \times f_{e,max}$$

Soit (calibre 5V $\Rightarrow q = 0.1 \text{ mV}$) :

$$f_{e,max} = 80 \text{ kHz et } N_{max} = 1760 \text{ points}$$

- ✓ Pour mettre en évidence $f_{e,max}$, on fixe Δt , et augmente progressivement f_e jusqu'à observer deux points consécutifs de même ordonnées, comme indiqué figure 11

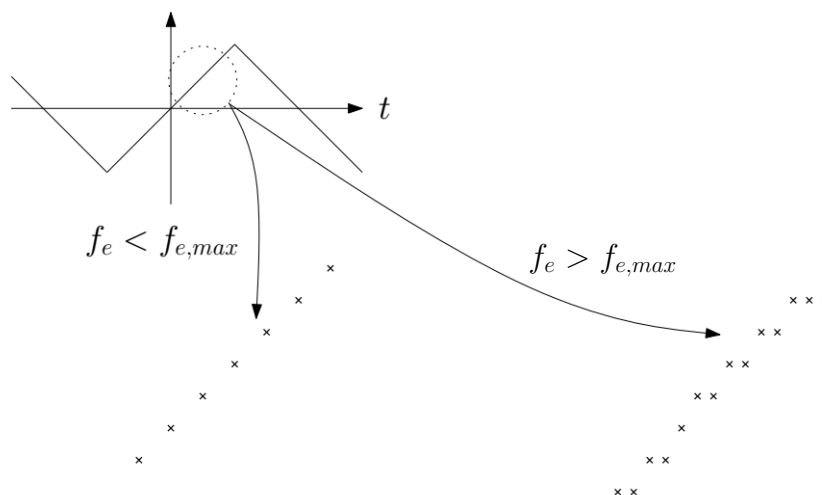


FIGURE 11 – Optimisation de la fréquence d'échantillonnage à N constant

3. Comparer les deux méthodes, à N constant ou à Δt constant.

Les deux expériences sont complémentaires : d'un coté il faut veiller à ce que f_e soit suffisamment importante pour éviter les phénomènes de repliement de spectre, d'un autre coté, il faut veiller à ne pas choisir f_e trop élevée sous peine d'encombrer l'espace mémoire pour rien.

2.4 Détecter des erreurs de quantification

On acquiert un signal sinusoïdal de fréquence $f = 100 \text{ Hz}$ appliqué sur l'entrée EA0 de la carte, mais cette fois on règle l'amplitude du signal sur une valeur faible de l'ordre de 0.1 V et on lance l'acquisition sans synchronisation.

- ✓ En fixant la durée à $\Delta t = 10 \text{ ms}$ et le nombre des points à $N = 2000$, on obtient une fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{N}{\Delta t} = 200 \text{ kHz}$.
- ✓ On utilise la calibration automatique et la loupe pour visualiser une partie de la courbe en détail. Le résultat obtenu est représenté figure 12.

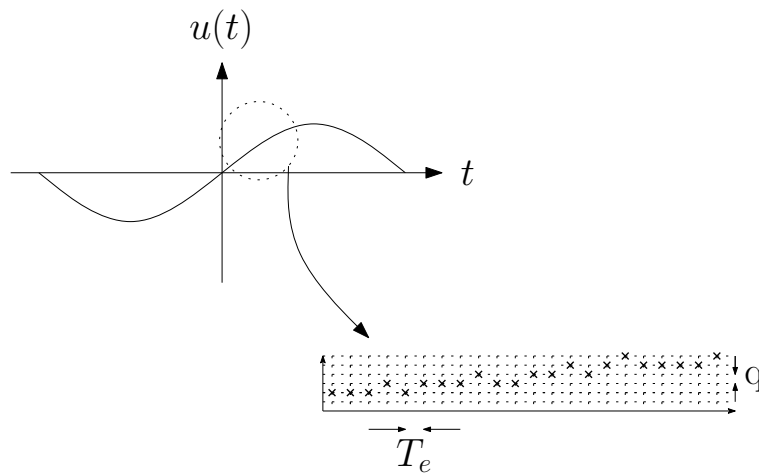


FIGURE 12 – Acquisition dans le cas de faibles amplitudes

- ✓ On constate que :
 - Le critère de Shannon est vérifié.
 - La fréquence d'échantillonnage dépasse la valeur maximale au delà de laquelle deux points peuvent avoir la même ordonnée ($C = 0.2 \text{ V} \Rightarrow q = 0.1 \text{ mV} : p \approx \frac{2 \times 01}{T} = 20 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$ et donc : $f_{e,max} = \frac{p}{q} = 200 \text{ Hz}$).
- ✓ En plus de l'espace mémoire inutilement grand pour l'acquisition, il apparaît un autre problème : la pente instantanée du signal étant très faible, certains points voient leur ordonnée diminuer alors que l'on se situe sur une portion de pente positive. Ceci est dû au bruit électronique : au moment de la quantification, un point peut obtenir une ordonnée inférieure à la valeur attendue à cause des fluctuations. La plus grande erreur correspond au pas de quantification.

3 Exemples de graphes obtenus par les élèves

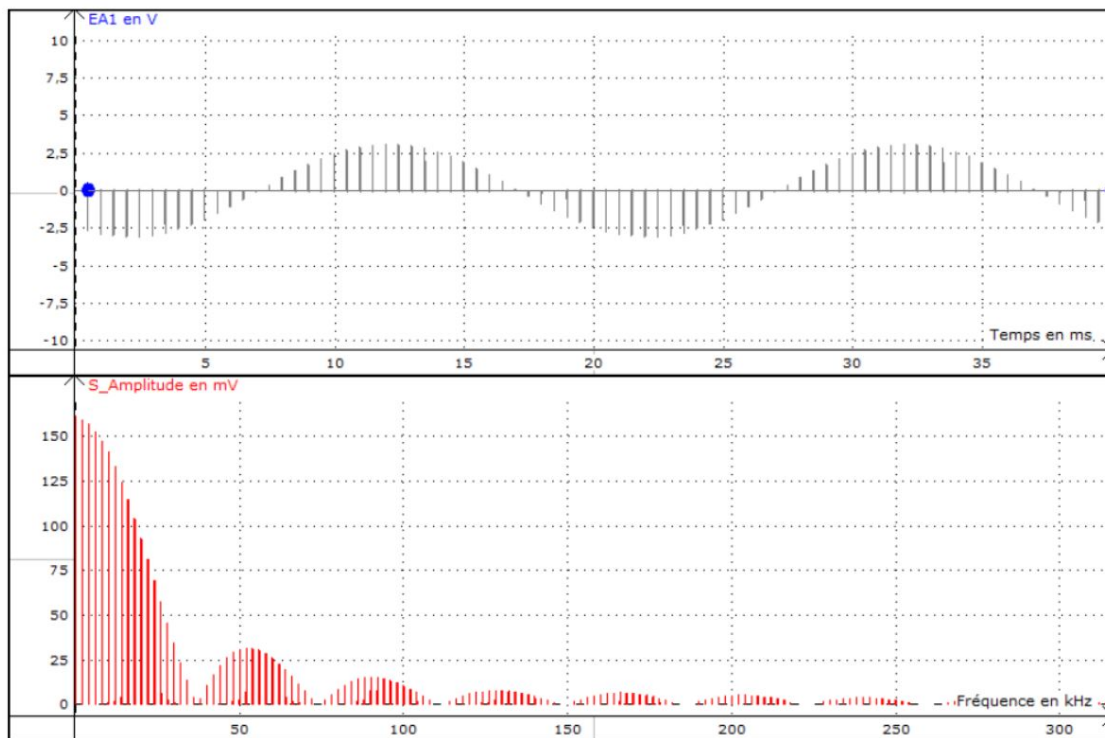


FIGURE 13 – Signal (1) sinusoïdal correctement échantillonné visualisé, avec son spectre, sous LATIS-Pro

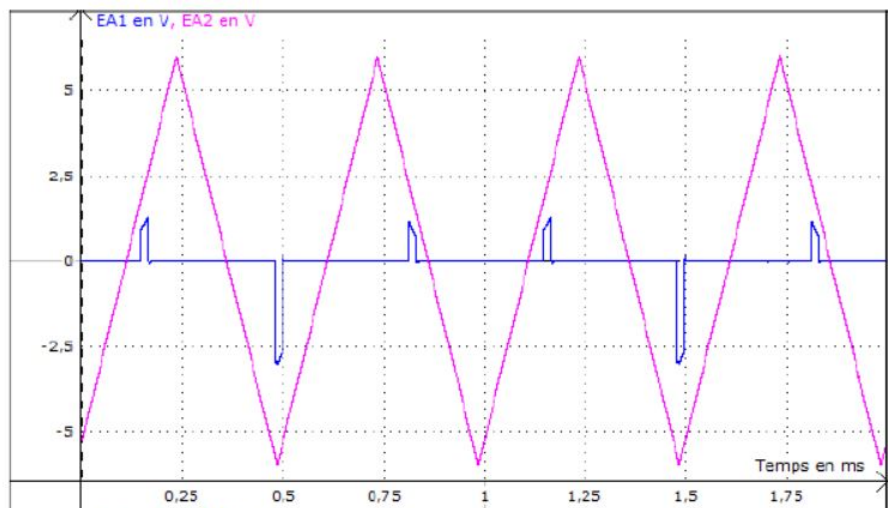


FIGURE 14 – Signal (2) en dents de scie et le signal échantillonné (3), dans le cas où le critère de Shannon n'est pas vérifié, le tout visualisé sous LATIS-Pro

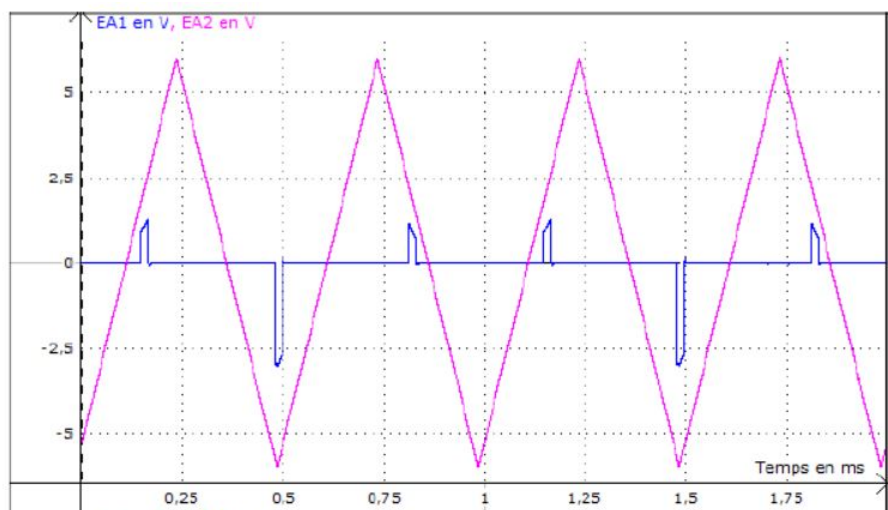
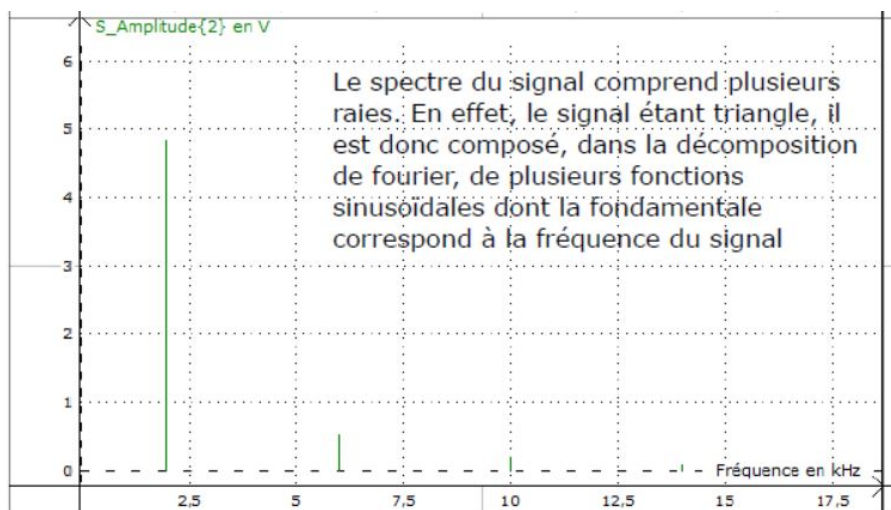


FIGURE 15 – Spectre du signal (2) visualisé sous LATIS-Pro

FIGURE 16 – Spectre du signal (3) visualisé sous LATIS-Pro : L'effet de τ apparaît nettement

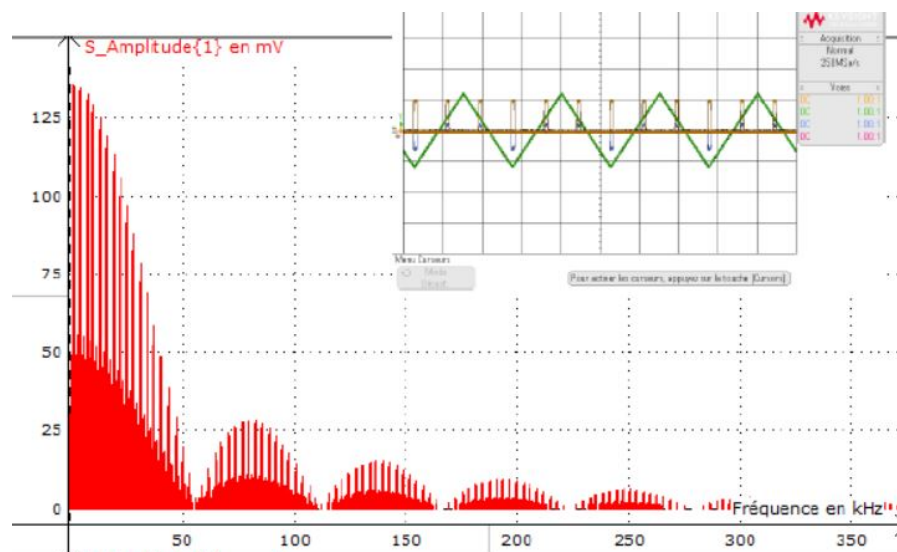


FIGURE 17 – Zoom sur le spectre du signal (3) : pointer quelques fréquences autour de kf_e pour montrer qu'il y a repliement