Réponse d'un système linéaire à des signaux non sinusoïdaux.

Pour étudier la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque on peut procéder de deux manières :

- ✓ Si le signal est périodique, on peut utiliser la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée.
- ✓ Si le signal n'est pas périodique, on peut utiliser cette fois la décomposition en intégrale de Fourier du signal d'entrée et utiliser les produits de convolution (voir chapitre sur la CAN ou sur l'optique de Fourier) ou alors, plus simplement, on peut étudier la réponse indicielle du système linéaire.

I. Réponse indicielle d'un système linéaire.

1. Cas général (Rappels).

a) Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

L'équation différentielle vérifiée par le signal de sortie est du type : $a_o.s(t)+a_1\dfrac{ds}{dt}+a_2\dfrac{d^2s}{dt^2}+...+a_n\dfrac{d^ns}{dt^n}=f(t)$ où *s(t)* est une fonction du temps caractérisant la réponse d'un système à l'excitation *f(t)*.

Les solutions de cette équation s'écrivent : $s(t) = s_l(t)+s_f(t)$ où $s_l(t)$ est la solution libre et $s_f(t)$ est la solution forcée.

b) Solution libre.

- $s_l(t)$ est la solution de l'équation différentielle sans seconde membre, c'est-à-dire la solution de l'équation différentielle dans le cas où *f(t)=0*.
  $\Rightarrow$ Pour déterminer $s_l(t)$, il faut donc résoudre l'**équation différentielle homogène** :
  $$a_o.s(t)+a_1\frac{ds}{dt}+a_2\frac{d^2s}{dt^2}+...+a_n\frac{d^ns}{dt^n}=0$$
- On cherche les solutions complexes sous la forme : $s_l(t)=A.e^{r.t}$ (*r* et *A* étant à priori complexes).
  $\Rightarrow$ En remplaçant ces solutions dans l'équation différentielle homogène, on obtient l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle homogène :
  $$a_o+a_1r+a_2r^2+...+a_nr^n=0 \quad \textit{(Polynôme de degrés n)}$$
- Si les racines de ce polynôme sont distinctes, alors l'ensemble des solutions forment un espace vectoriel de dimensions n : $s_l(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k.e^{r_k.t}$ où les r_k sont les n racines distinctes de l'équation caractéristique et où les A_k sont les n constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.
- S'il existe une racine multiple (notée r_j) d'ordre m+1 alors les termes correspondant à cette racine sont remplacés par :
  $$\left(B_o+B_1t+B_2\frac{t^2}{2!}+....+B_m\frac{t^m}{m!}\right).e^{r_j.t}$$

c) Solution forcée.

La réponse d'un système linéaire à un régime forcé est du même type que l'excitation

- Si *f(t)* est une constante alors $s_f(t)$ est une constante.
- Si *f(t)* est une somme de fonctions alors $s_f(t)$ est la somme des différentes solutions forcées correspondante.
- Si *f(t)* est un polynôme de degrés n alors $s_f(t)$ est un polynôme de degrés n.
- Si *f(t)* est une fonction sinusoïdale du temps ($f(t) = F_m.\cos(\omega t)$) alors $s_f(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps($s_f(t) = S_m.\cos(\omega t+\phi)$).

d) Solution.

La solution s'écrit : $s(t) = s_l(t)+s_f(t)$
Les constantes d'intégration sont déterminées à partir de l'expression de *s(t)* et à partir des conditions initiales (valeurs de s(t) et de ses dérivées à t = 0^+).

2. Cas des SL1 et SL2 : Utilisation des formes canoniques dans la résolution d'équations différentielles.

a) Equation différentielle du 1er ordre.

Forme canonique de l'équation : $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = f(t)$ où τ est le temps de réponse du SL1

- Solution libre : $s_l(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$
- Solution forcée : $s_f(t)$
- Solution $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + s_f(t)$
- Détermination de A : à partir de la connaissance de $s(0^+)$

b) Equation différentielle du 2nd ordre.

Forme canonique de l'équation : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s(t) = f(t)$ où : $\begin{cases} Q = facteur\ de\ qualité \\ \omega_o = pulsation\ propre \\ \sigma = \frac{1}{2Q} = facteur\ d'amortissement \end{cases}$

- Solution libre : Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_o}{Q}r + \omega_o^2 = 0$ et discriminant : $\Delta = \frac{\omega_o^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$

Régime pseudo-périodique :

- $\Delta < 0$ et donc $Q > \frac{1}{2}$
- Les solutions sont complexes : $r = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j\overbrace{\frac{\omega_o}{2Q}\sqrt{(4Q^2 - 1)}}^{\Omega = pseudo-pulsation}$

Solution libre : $s_l(t) = e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$

- Solution générale : $s(t) = s_f(t) + e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$
- Détermination de A et B par la connaissance de $s(0^+)$ et $\left.\frac{ds}{dt}\right)_{0^+}$

Régime apériodique :

- $\Delta > 0$ et donc $Q < 1/2$
- Les solutions sont réelles : $r = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm \overbrace{\frac{\omega_o}{2Q}\sqrt{(1-4Q^2)}}^{\Omega'}$

$$\text{Solution libre : } s_l(t) = e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}(Acosh\Omega' t + Bsinh\Omega' t)$$

- Solution générale : $s(t) = s_f(t) + e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}(Acosh\Omega' t + Bsinh\Omega' t)$
- Détermination de A et B par la connaissance de $s(0^+)$ et $\left.\frac{ds}{dt}\right)_{0^+}$

Régime critique :

- $\Delta = 0$ et donc $Q = 1/2$
- Une seule solution réelle (racine double) : $r = -\frac{\omega_o}{2Q}$

$$\text{Solution libre : } s_l(t) = e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}(A + Bt)$$

- Solution générale : $s(t) = s_f(t) + e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}(A + Bt)$
- Détermination de A et B par la connaissance de $s(0^+)$ et $\left.\frac{ds}{dt}\right)_{0^+}$

3. Relation entre la réponse fréquentielle et la réponse indicielle d'un SL.

a) Valeur initiale.

- La valeur de $s(0^+)$ est liée à la propriété du SL à laisser passer les hautes fréquences.
  $\Rightarrow$ Ainsi, pour un filtre passe-haut, la valeur de $s(0^+)$ sera non nulle.
- De manière plus générale, pour la réponse à un échelon de tension E, on a la relation :

$$s(0^+) = H(p \to \infty)E$$

b) Valeur finale.

- La valeur de $s(t \to \infty)$ est liée à la propriété du SL à laisser passer les basses fréquences.
  $\Rightarrow$ Ainsi, pour un filtre passe-bas, la valeur de $s(t \to \infty)$ sera non nulle.
- De manière plus générale, pour la réponse à un échelon de tension E, on a la relation :

$$s(t \to \infty) = H(0)E$$

c) Régime libre.

- Soit un système linéaire quelconque dont on étudie la réponse indicielle.
  L'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ étant : $\sum_k a_k \left(\frac{d^k s}{dt^k}\right) = f(t)$
  L'équation différentielle homogène étant $\sum_k a_k \left(\frac{d^k s}{dt^k}\right) = 0$, l'équation caractéristique est : $\sum_k a_k p^k = 0$
- Considérons maintenant la fonction de transfert correspondant à la réponse fréquentielle de ce système : $H(p) = \frac{\sum_j b_j p^j}{\sum_k a_k p^k}$
  $\Rightarrow$ En annulant le dénominateur de la fonction de transfert, on retrouve l'équation caractéristique précédente.

Conséquences :

- Dans une fonction de transfert, le dénominateur est caractéristique du filtre tout comme l'équation caractéristique dans l'équation différentielle. Ces deux notions permettent notamment d'étudier la stabilité du système.
- Pour un même filtre (par exemple circuit RLC série), les fonctions de transfert correspondants aux différentes tensions de sortie (tension aux bornes du condensateur, de la bobine ou de la résistance) auront toutes le même dénominateur et les équations différentielles auront toutes la même équation caractéristique.

d) Stabilité des systèmes linéaires.

- Un SL1 ou un SL2 est stable si les coefficients du polynôme D(p) sont tous de même signe.
- Un SL1 ou un SL2 est stable si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont tous de même signe

Conséquences :

- Si l'on considère la forme canonique de l'équation différentielle d'un SL1 : $\frac{ds}{dt}+\frac{s}{\tau}=f(t)$, on en déduit que ce système est stable si son temps de réponse τ est positif.
- Si l'on considère la forme canonique de l'équation différentielle d'un SL2 : $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_o}{Q}\frac{ds}{dt}+\omega_o^2 s(t)=f(t)$, on en déduit que ce système est stable si son facteur de qualité Q est positif (ou le coefficient d'amortissement σ est positif).

II. Utilisation de la décomposition en série de Fourier.

1. Principe (Rappel).

- On étudie la réponse d'un système linéaire à un signal périodique de période T. Soit $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie. On note $\underline{H}=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$, la fonction de transfert de ce système linéaire.

  Le signal $e(t)$ étant périodique $\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$, il peut se décomposer en série de Fourier :

$$e(t)=E_o+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k\sin(k\omega t+\phi_k))$$

- Le système étant linéaire chaque harmonique de $e(t)$ donnera en sortie un signal de même pulsation.

  $\Rightarrow$ Le spectre de Fourier du signal de sortie sera composé des mêmes pulsations que celles de $e(t)$:

$$s(t)=S_o+\sum_{k=1}^{\infty}(S_k\sin(k\omega t+\phi'_k)$$

L'amplitude et la phase à l'origine de chaque harmonique de $s(t)$ peuvent être calculées à partir de la fonction de transfert :

$$S_o=|\underline{H}(0)|.E_o$$
$$S_k=|\underline{H}(jk\omega)|.E_k$$
$$\phi'_k=\mathrm{argument}(\underline{H}(jk\omega))+\phi_k$$

2. Exemples.

Considérons un filtre passe-bande sélectif du second ordre : $\underline{H} = \dfrac{1}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_o}-\dfrac{\omega_o}{\omega}\right)} = \dfrac{1}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$ avec $Q \gg 1$

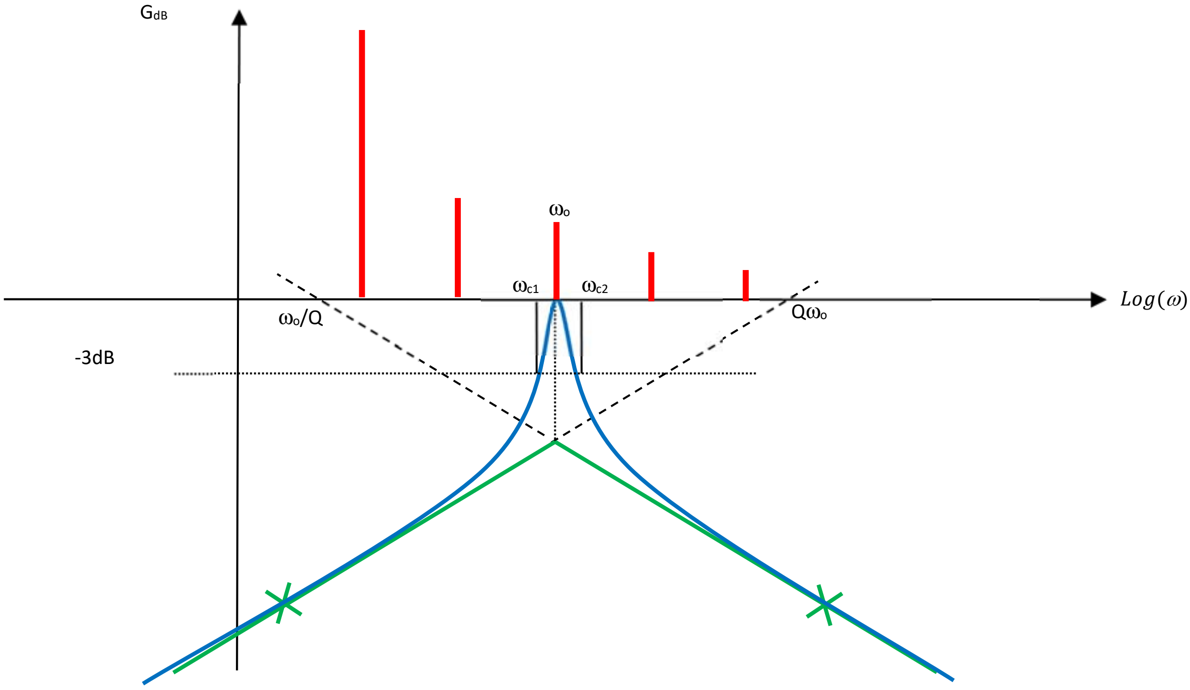
Ce filtre est attaqué par un signal en créneaux dont la décomposition en série de Fourier est :

$$V_e(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2E}{\pi(2p+1)} \sin\left((2p+1)\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Et dont la période T peut prendre différentes valeurs.

a) 1er cas : $5\omega = 5\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \omega_0$

Pour déterminer la réponse du système, on superpose le diagramme de Bode et le spectre de Fourier du signal d'entrée :



On constate alors que la seule pulsation située dans la bande passante du filtre est $5\omega = \omega_0$

⇒ En 1ère approximation, on pourra donc considérer que le signal de sortie est un signal sinusoïdal de pulsation 5ω de la forme :

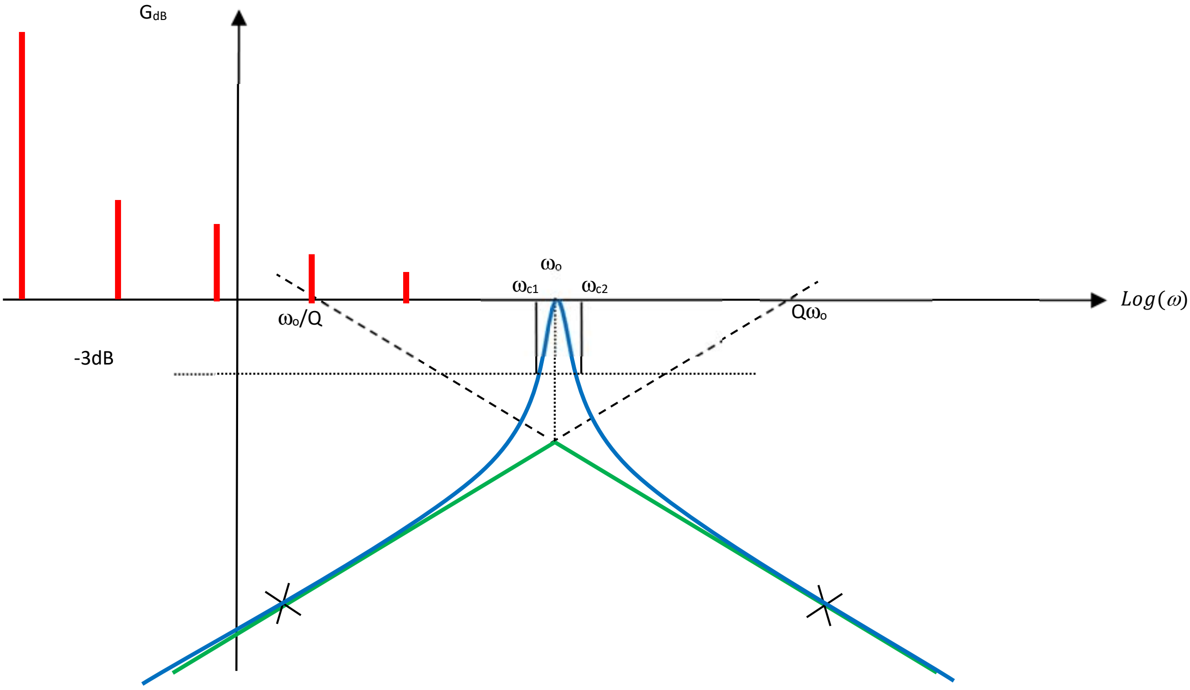
$$V_s(t) = \frac{2E}{5\pi}\sin(5\,\omega t)$$

On peut ensuite affiner notre analyse, en montrant que les harmoniques voisins sont d'amplitude négligeable :

- ✓ Pour la pulsation 3ω, le signal de sortie est : $\frac{2E}{3\pi} \times \left|\underline{H(j3\omega)}\right| \sin\left(3\omega t + arg\left(\underline{H(j3\omega)}\right)\right)$
- ✓ Pour la pulsation 7ω, le signal de sortie est : $\frac{2E}{7\pi} \times \left|\underline{H(j7\omega)}\right| \sin\left(7\omega t + arg\left(\underline{H(j7\omega)}\right)\right)$

b) 2ème cas : $\omega = \frac{2\pi}{T} \ll 5\omega_0$

Pour déterminer la réponse du système, on superpose le diagramme de Bode et le spectre de Fourier du signal d'entrée :



On constate alors que les différentes pulsations intervenant dans la décomposition en série de Fourier, sont en dehors de la bande passante : le signal de sortie sera donc très atténué par rapport au signal d'entrée.

Pour aller un peu plus loin, on peut considérer que **l'essentiel du signal se situe dans le domaine dérivateur du filtre** et donc que le signal de sortie aura la forme de la dérivée du signal d'entrée : en l'occurrence ici, une alternance de pic positifs et négatif coïncidant au passage de 0 à E (ou de E à 0) du signal d'entrée :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \approx \frac{1}{Q}\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow V_s(t) = \underbrace{\frac{1}{Q\omega_0}}_{\substack{coefficient\\ multiplicatif}} \underbrace{\frac{dV_e}{dt}}_{dérivée}$$

a) 2ème cas : $\omega = \frac{2\pi}{T} \ll 5\omega_0$

Pour déterminer la réponse du système, on superpose le diagramme de Bode et le spectre de Fourier du signal d'entrée. On constate de même que les différentes pulsations intervenant dans la décomposition en série de Fourier, sont en dehors de la bande passante : le signal de sortie sera donc très atténué par rapport au signal d'entrée.

Pour aller un peu plus loin, on peut considérer **que l'essentiel du signal se situe dans le domaine intégrateur du filtre** et donc que le signal de sortie aura la forme de la primitive du signal d'entrée : en l'occurrence ici, une alternance de segments inclinés par rapport à l'axe, de pentes successivement positives et négatives (signal en dents de scie) :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \approx \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow V_s(t) = \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{\substack{coefficient\\multiplicatif}} \underbrace{\int V_e(t)dt}_{primitive} + Cste$$