

Vérification de la loi de Torricelli

Le but de l'expérience, dont le schéma est donné ci-dessous, est de vérifier la loi de vidange de Toricelli donnant l'expression de la vitesse de sortie du fluide :

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

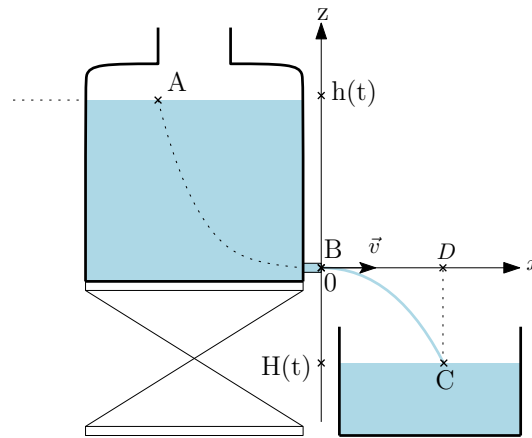


Figure 1 – Schéma de l'expérience de Torricelli

On note :

- ✗ L , la longueur du tube de sortie,
- ✗ r , le rayon du tube de sortie ($s = \pi r^2$),
- ✗ R le rayon intérieur du réservoir ($S = \pi R^2$),
- ✗ $V = V_A$, la vitesse de l'écoulement au point A ,
- ✗ $v = v_B$ la vitesse de l'écoulement au point B ,
- ✗ $h(t)$ la cote du point A (l'origine étant prise en B),
- ✗ $H(t)$, la cote du point C ,
- ✗ η , la viscosité dynamique de l'eau, μ sa masse volumique et ν sa viscosité cinématique.

On admettra que l'écoulement d'eau peut être considéré comme parfait (phénomènes diffusifs négligeables). En toute rigueur, ceci est vérifié si l'écoulement d'eau dans la petite conduite de sortie se fait à grand nombre de Reynolds¹. Un critère moins contraignant consiste à négliger la perte d'énergie cinétique volumique des particules fluides lors du passage par l'orifice. Cela se traduit par la condition suivante² :

$$r^2 \gg \frac{2L\nu}{v}$$

1. Voir MF4

2. Plus précisément, en considérant que le rapport entre l'énergie cinétique volumique d'une particule fluide et l'énergie volumique dissipée par les frottements le long du tube doit être supérieure à 10, on obtient :

$$\frac{e_c}{e_\eta} = \frac{\mu v^2}{\eta \Delta v L} \approx \frac{r^2 v}{2\nu L} > 10$$

1 Rappels : Débit de vidange

1.1 Hypothèses

- ✗ On considère l'écoulement parfait et incompressible,
- ✗ On considère que l'écoulement est quasi-stationnaire :
 - ☛ Première approche : le temps caractéristique de variation de $h(t)$ (noté τ) est très grand devant le temps caractéristique d'évolution d'une particule fluide (noté τ_{pf})
 - ☛ Deuxième approche : l'accélération locale d'une particule fluide est petite devant son accélération convective,

Dans les deux cas, on trouve la même condition :

$$S \gg s$$

condition que l'on considèrera vérifiée dans le dispositif.

- ✗ On ne considère pas l'écoulement comme irrotationnel dans sa globalité (des tourbillons de recirculation doivent exister dans les coins et vers l'orifice). Par contre, une simulation permet de justifier que l'on puisse isoler quelques lignes de courant stationnaires :

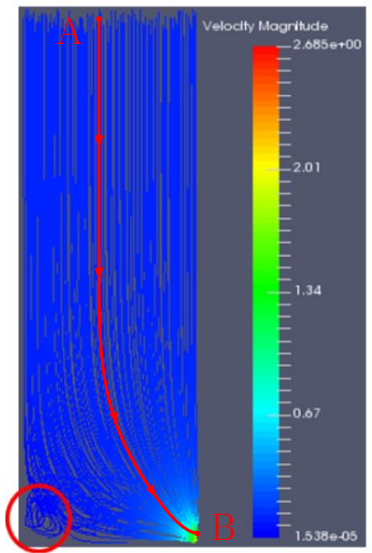


Figure 2 – Simulation de l'écoulement (Cmsol)

On considèrera donc que la ligne de courant (AB) est bien stable (stationnaire).

1.2 Débit de vidange

- ✗ Le débit de vidange s'écrit :

$$D_v = sv = SV = -S \frac{dh}{dt}$$

On a donc :

$$V_A = V = \frac{s}{S} v \ll v$$

- ✗ Á l'aide des hypothèses, on écrit le théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible entre A et B :

$$\frac{1}{2} \mu V_A^2 + P_A + \mu g z_A = \frac{1}{2} \mu V_B^2 + P_B + \mu g z_B$$

✕ sachant que $P_A = P_B = P_0$, que $z_A = h(t)$ et que $z_B = 0$ et enfin que $V \ll v$, on obtient donc :

$$v = \sqrt{2gh}$$

Et :

$$D_v = s \sqrt{2gh} = -S \frac{dh}{dt}$$

1.3 Retour sur l'hypothèse quasi-stationnaire

✕ Première approche : le temps caractéristique de variation de $h(t)$ (noté τ) est très grand devant le temps caractéristique d'évolution d'une particule fluide (noté τ_{pf}) :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S} \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{h_0}{\tau} \approx \frac{s}{S} \sqrt{gh_0} \Rightarrow \tau \approx \frac{S h_0}{s v_0}$$

$$\tau_{pf} \approx \frac{h_0}{v_0}$$

On doit donc avoir :

$$S \gg s$$

✕ Deuxième approche : l'accélération locale d'une particule fluide est petite devant son accélération convective,

$$\left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right\| \approx \frac{v_0}{\tau}$$

$$\left\| \left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{V} \right\| \approx \frac{v_0^2}{h_0}$$

Ainsi :

$$\left\| \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{V} \right\| \Rightarrow \frac{v_0}{\tau} \ll \frac{v_0^2}{h_0}$$

Soit :

$$\tau \gg \frac{h_0}{v_0}$$

Soit, en tenant compte de l'expression de τ :

$$S \gg s$$

Conclusion

On doit donc :

✕ Choisir r « pas trop petit » de façon à ce que l'écoulement puisse être considéré comme parfait dans l'orifice :

$$r^2 \gg \frac{L\nu}{2v}$$

✕ Choisir r « suffisamment petit » pour pouvoir considérer l'écoulement comme stationnaire :

$$r^2 \ll R^2$$

Autre point déterminant dans l'expérience la durée de l'expérience : celle si doit être de l'ordre de grandeur de τ de façon à pouvoir observer des variations de $h(t)$ comme on le confirmera par la suite : on aura donc intérêt à diminuer le rapport S/s pour limiter la durée de l'expérience.

2 Méthode de pointage vidéo

On filme l'expérience et on choisit plusieurs clichés, à différents temps, comme représenté figure 3. On exploite chaque cliché de façon à :

- ✗ Déterminer la hauteur $h(t)$,
- ✗ Déterminer l'équation de la trajectoire du filet d'eau³ et en déduire la vitesse $v(t)$

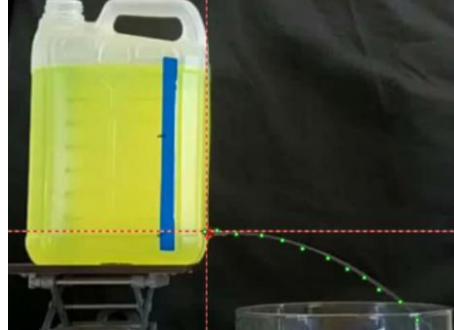


Figure 3 – Méthode de pointage

Il suffit alors de tracer $v(t)$ en fonction de $\sqrt{h(t)}$ pour vérifier la loi.

Cette méthode de pointage, vue au secondaire et en première année, ne sera pas abordée ici

3 Méthode de pointage de $h(t)$ seule

3.1 Expression théorique de $h(t)$

- ✗ On part de :

$$D_v = sv(t) = -S \frac{dh}{dt} \quad (2)$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{s}{S} dt$$

- ✗ La résolution de cette équation différentielle nous permet d'avoir l'évolution de $h(t)$ en fonction du temps :

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{s}{S} t \quad (3)$$

En notant h_0 la hauteur d'eau dans le réservoir à $t = 0$.

3.2 Temps caractéristique de l'expérience

- ✗ Ce temps caractéristique est le temps τ introduit dans les hypothèses.
- ✗ On estime ce temps caractéristique à la réalisation de l'expérience, en considérant que les deux termes dans l'expression de $\sqrt{h(t)}$ (equation 3) sont du même ordre de grandeur⁴, on obtient donc :

$$\tau \approx \frac{S}{s} \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{g}}$$

3. Le calcul montre facilement que l'équation de la trajectoire est :

$$z = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v(t)} \right)^2$$

4. En effet, pour mettre en évidence la variation du débit de vidange, il faut absolument que la hauteur $h(t)$ varie

- ✗ On peut également estimer ce temps directement à partir de l'équation 2 :

$$D_v = sv(t) = -S \frac{dh}{dt} \Rightarrow sv_0 = S \frac{h_0}{\tau} \Rightarrow \tau \approx \frac{S h_0}{s v_0} \approx \frac{S}{s} \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{g}}$$

3.3 Méthode

- ✗ On mesure $h(t)$, pour différentes valeurs de t pendant un temps suffisamment long (de l'ordre de quelques τ), l'intervalle Δt choisi devant permettre d'avoir suffisamment de points pour une modélisation de qualité.
- ✗ On trace ensuite, $\sqrt{h(t)}$ en fonction de t .
- ✗ On effectue ensuite une régression linéaire.

4 Méthode utilisant la mesure de la masse $m(t)$ d'eau éjectée

4.1 Expression théorique de $m(t)$

- ✗ la masse $m(t)$ de l'eau éjectée vérifie :

$$\frac{dm}{dt} = \mu D_v = \mu s \sqrt{2gh} = \mu s \sqrt{2g} \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{s}{S} t \right)$$

Soit, en notant D_{m0} , le débit à $t = 0$:

$$\frac{dm}{dt} = D_{m0} - \mu \frac{s^2}{S} gt$$

- ✗ On en déduit par intégration, la masse $m(t)$ d'eau éjectée :

$$m(t) = D_{m0}t - \mu \frac{s^2}{2S} gt^2$$

- ✗ Le premier terme correspond à la masse $m(t)$ que l'on aurait si le débit était constant.

4.2 Temps caractéristique

- ✗ Ce temps caractéristique est le temps τ introduit dans les hypothèses.
- ✗ On peut estimer ce temps caractéristique, en considérant que les deux termes apparaissant dans le débit massique sont du même ordre de grandeur, on obtient :

$$\tau \approx \frac{S}{s} \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{g}}$$

- ✗ On peut également estimer ce temps caractéristique en considérant que les deux termes apparaissant dans l'expression de la masse $m(t)$ sont du même ordre de grandeur, on obtient également :

$$\tau \approx \frac{S}{s} \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{g}}$$

4.3 Méthode

- ✕ On mesure $m(t)$ pour différentes valeurs de t pendant un temps suffisamment long (de l'ordre de quelques τ), l'intervalle Δt choisi devant permettre d'avoir suffisamment de points pour une modélisation de qualité.
- ✕ On trace ensuite $m(t)$ en fonction de t .
- ✕ On modélise la courbe obtenue par la fonction :

$$m(t) = a + bt + ct^2$$

Noter qu'ici le paramètre a doit être introduit pour des raisons expérimentales, bien que n'apparaissant pas dans le modèle.