MF1 : ETUDE PHENOMENOLOGIQUE DES FLUIDES.

I. MODELE DU FLUIDE.

1. ETAT FLUIDE.

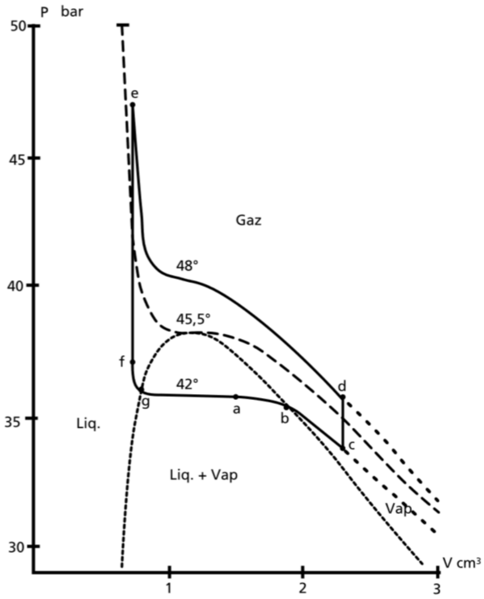
a. APPROCHE THERMODYNAMIQUE :

On oppose l'état fluide à l'état solide : un fluide est caractérisé par sa capacité à s'écouler et n'a pas de forme propre.

Dans l'état fluide, on distingue deux états extrêmes :

- Les gaz : fluides fortement compressibles, peu denses.
- Les liquides : fluides compressibles, denses.

Entre ces deux cas, on parle de la continuité de l'état fluide : on peut, sous certaines conditions, passer de l'état liquide à l'état fluide sans discontinuité (c'est-à-dire sans transition de phase).



Lors de l'évolution ($bcdefg$) le fluide passe de l'état gazeux à l'état liquide sans transition de phase.

b. APPROCHE MECANIQUE.

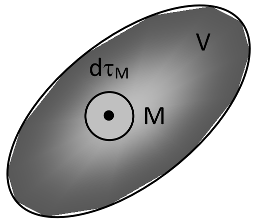
Les forces pressantes vues en 1ère année, jouent un rôle très important en mécanique des fluides. Notons cependant que ce ne sont pas les seules forces à considérer : Dans le cas d'un fluide réel, on doit considérer les forces de viscosité.

Dans les solides, les vitesses des différents points du solide sont reliées entre elles car les atomes (ou molécules) sont liés rigidement entre eux.

Dans un fluide, les différentes particules sont en mouvement désordonné les unes par rapport aux autres. La description de l'état fluide s'avère ainsi plus complexe.

2. Approximation des milieux continus.

Soit un fluide délimité par un volume V (échelle macroscopique).



A l'échelle microscopique, un fluide est un milieu discontinu constitué de molécules, atomes en agitation. Pour traiter le fluide comme un milieu continu, on le décompose en volume élémentaire correspondant à l'échelle mésoscopique. Le volume $d\tau_M$ est choisi de façon à ce que :

- $d\tau_M << V$: On pourra ainsi utiliser le calcul intégral.
- Le nombre de particules dN_M dans le volume $d\tau_M$ est très grand devant 1 : On pourra donc négliger les variations de dN_M dues à l'agitation thermique.

On appelle particule fluide ce volume $d\tau_M$ centré en M et on note dm_M sa masse.

On peut associer à la particule fluide en M différentes grandeurs macroscopiques :

- $\vec{V}(M,t) = \left\langle \vec{V} \right\rangle_M$=vitesse de la particule fluide=vitesse moyenne des particules dans $d\tau_M$.
- $\vec{a}(M,t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(M,t)$=accélération de la particule fluide.
- $T(M,t)$=température en M, $P(M,t)$=pression en M
- $\mu(M,t) = \frac{dm_M}{d\tau_M}$=masse volumique en M,
- $u(M,t) = \frac{dU_M}{dm_M}$=énergie interne massique en M
- …

Notons que connaissant les grandeurs locales, on peut calculer les grandeurs intégrales.

Par exemple : $V = \iiint_V d\tau_M$; $U = \iiint_V u(M,t).\mu(M,t).d\tau_M)$

La particule fluide sera donc considérée comme un point matériel (de masse dm_M, de vitesse $\vec{V}(M,t)$…) et on pourra lui appliquer les lois de la mécanique.

II. Fluide en mouvement.

Pour décrire l'écoulement, on peut décrire le mouvement de la particule fluide : on parle d'approche lagrangienne ou on peut décrire l'évolution de grandeurs macroscopiques locales (P, μ, $\vec{V}(M,t)$) au cours du temps : on parle d'approche Eulérienne.

1. Approche Lagrangienne.

On décrit le mouvement des particules fluides qui constituent le fluide en écoulement.
Connaissant la trajectoire de chaque particule fluide que l'on suit au cours du temps, on reconstitue le mouvement d'ensemble du fluide.

a. Exemples :

Un pêcheur assis au bord d'une rivière regarde le mouvement de l'un de ses bouchons à la surface de l'eau.
Un skieur arrêté sur le côté d'une piste suit des yeux un skieur qui descend la piste.
Un vacancier sur une plage suit la trajectoire d'un surfeur sur la mer.

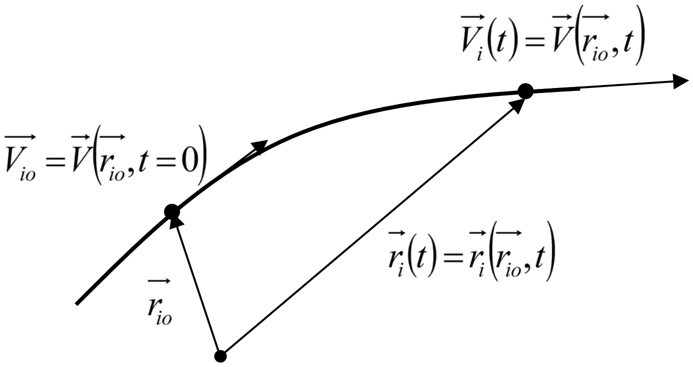
b. Position et vitesse d'une particule fluide.

Le fluide est décrit à chaque instant par l'ensemble des vitesses des particules fluides qui le composent.

Soit la particule fluide (i) qui à t=0 est repéré par le vecteur position : $\overrightarrow{r_{io}} = \overrightarrow{OM_i}\Big)_{t=0}$ alors sa vitesse à l'instant t sera $\vec{V_i}\left(\overrightarrow{r_{io}}, t\right) = \frac{d\vec{r_i}}{dt}$ fonction du temps uniquement.

$\vec{V_i}(t) = \vec{V}(\vec{r_i}(t), t) = \vec{V}(x_i(t), y_i(t), z_i(t), t)$

où $\vec{V_i}(t) = \vec{V}(\overrightarrow{r_{io}}, t) = \vec{V}(x_{io}, y_{io}, z_{io}, t)$



2. Approche Eulerienne.

a. Exemples :

Reprenons l'exemple du pêcheur assis au bord de la rivière. Celui-ci, dans son approche Eulérienne regarde l'évolution de l'écoulement de la rivière en un point précis (il regarde par exemple un tourbillon se former près d'un rocher)

Le skieur à l'arrêt sur le côté de la piste regarde, dans son approche Eulérienne, les skieurs passer en un endroit fixe de la piste (il regarde par exemple les skieurs franchir une bosse).

Le vacancier sur la plage regarde, dans son approche Eulérienne, les différents surfeurs évoluer en un endroit précis de la baie.

b. Champs.

Dans l'approche Eulérienne, on détermine en un point donné de l'espace l'évolution au cours du temps des caractéristiques du fluide $\left(\vec{V}, P, \mu, \dots\right)$. Par conséquent, dans la description Eulérienne d'un écoulement, on décrit l'ensemble des points M de l'espace où circule le fluide en leur associant des grandeurs macroscopiques locales. On définira donc $\vec{V}(M,t), P(M,t), \mu(M,t), \dots$

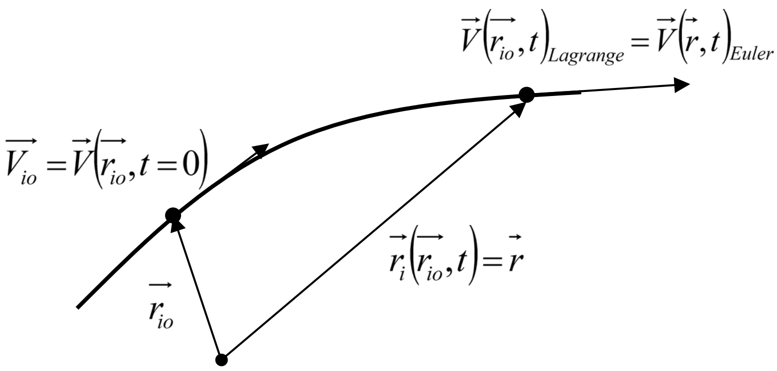
$\vec{V}(M,t) = \vec{V}(\vec{r}, t)$ est donc un champ de vecteur, dépendant à la fois du temps et de l'espace : $\vec{r}$ et t sont des variables découplées.

Plus généralement, on pourra définir en M et à l'instant t différents champs :

- Champs de vecteur : $\vec{a}(\vec{r}, t)$, $\vec{V}(\vec{r}, t)$, …
- Champs scalaires : $P(\vec{r}, t), \mu(\vec{r}, t), \dots$

Notons que $\vec{V}(\vec{r}, t)$ coïncide bien évidemment avec la vitesse de la particule fluide qui se trouve en M à l'instant t : $\vec{V}(\vec{r}, t)_{Euler} = \vec{V}(\vec{r}_{io}, t)_{Lagrange}$.

Ainsi, pour déterminer $\vec{V}(\overrightarrow{r_{io}}, t)_{Lagrange}$ à partir de $\vec{V}(\vec{r}, t)_{Euler}$, il suffit de déterminer $\vec{r_i}(t) = \vec{r_i}(\overrightarrow{r_{io}}, t)$ et de l'identifier à $\vec{r}$.



3. Representation et visualisation des ecoulements.

a. Trajectoire : approche Lagrangienne.

Definition.

La trajectoire d'une particule fluide est l'ensemble des positions occupées par une particule fluide au cours de son évolution dans l'écoulement.

Exemple :

La trajectoire des voitures sur une route la nuit est visualisée à l'aide d'une photo prise avec un long temps de pause.

DETERMINATION DE L'EQUATION D'UNE TRAJECTOIRE :

Soit $\vec{V}\left(\vec{r}(t),t\right)$ la vitesse de la particule fluide à l'instant t : $\vec{V}\left(\vec{r}(t),t\right)=\frac{d\overrightarrow{r(t)}}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{V}\left(\vec{r}(t),t\right)=\left|\begin{array}{l} V_x(x(t),y(t),z(t),t)=\frac{dx}{dt} \\ V_y(x(t),y(t),z(t),t)=\frac{dy}{dt} \\ V_z(x(t),y(t),z(t),t)=\frac{dz}{dt}\end{array}\right.$$

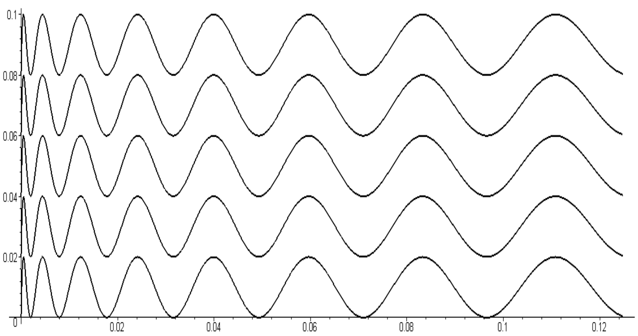
$\Rightarrow$ Ces équations sont à intégrer pour obtenir les équations paramétrées de la trajectoire.

<u>Exercice</u> :

Soit un écoulement tel que $\vec{V}=\left|\begin{array}{c}-k.x(t)+b.t \\ a.sin(\omega t) \\ 0\end{array}\right.$

Déterminons les équations paramétrées des trajectoires :

$$\vec{V}\left(\vec{r}(t),t\right)=\left|\begin{array}{c}-k.x(t)+b.t=\dfrac{dx}{dt}\Rightarrow x=\left(x_o+\dfrac{b}{k^2}\right)e^{-kt}+\dfrac{b}{k}\left(t-\dfrac{1}{k}\right) \\ a.sin(\omega t)=\dfrac{dy}{dt}\Rightarrow y=y_o+\dfrac{a}{\omega}(1-cos(\omega t)) \\ 0=\dfrac{dz}{dt}\Rightarrow z=z_o\end{array}\right.$$



b. LIGNES DE CHAMP : APPROCHE EULERIENNE.

DEFINITION.

Comme avec tous les champs de vecteurs nous pouvons définir les lignes de champ de $\vec{V}\left(\vec{r},t\right)$

Les lignes de champ de $\vec{V}\left(\vec{r},t\right)$ sont appelées lignes de courant.

On peut donc représenter à un instant t donné l'ensemble des lignes de courant d'un fluide.

EXEMPLE :

Sur une route, de nuit, on prend une photo avec un temps de pause très court : Pour chaque voiture la trace lumineuse des phares indique la vitesse de chaque véhicule.

DETERMINATION DE L'EQUATION D'UNE LIGNE DE CHAMP.

Pour obtenir à un instant t les lignes de courant, on doit chercher (x,y,z) tels que : $\overrightarrow{dr}\wedge\vec{V}\left(\vec{r},t\right)=\vec{0}$ soit : $\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} V_x(x,y,z,t) \\ V_y(x,y,z,t) \\ V_z(x,y,z,t) \end{vmatrix} = \vec{0}$

Exercice:

Soit un écoulement tel que $\vec{V}=\begin{vmatrix} -k.x+b.t \\ a.sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$

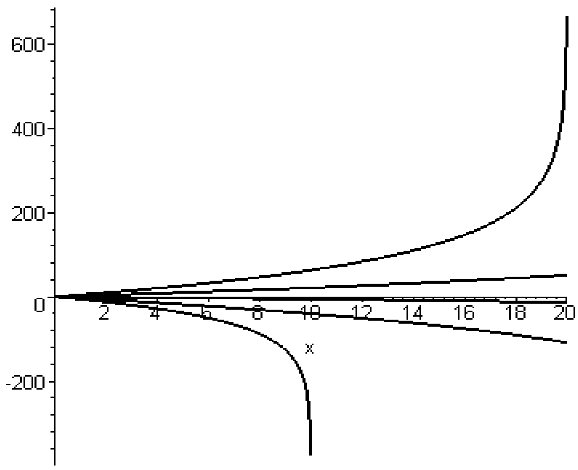
Déterminons les équations des lignes de champ :

$$\overrightarrow{dr}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} -k.x+b.t \\ a.sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow dx.a.sin(\omega t)-dy.(-k.x+b.t)=0$ (à un instant t donné

$\Rightarrow \frac{dx.a.sin(\omega t)}{(-k.x(t)+b.t)}=dy$

$\Rightarrow \frac{a.sin(\omega t)}{-k}ln\left(\frac{-k.x+b.t}{-k.x_o+b.t}\right)=(y-y_o)$



c. LIGNES D'EMISSION.

On peut aussi avoir recours à des traceurs : en des points particuliers de l'écoulement on peut émettre une substance (gaz, bulles, gouttes de colorant…) qui est alors entrainée par le fluide.

$\Rightarrow$ A un instant t donné, l'ensemble des particules fluides qui sont passées en ce point sont marquées et forment une ligne d'émission.

d. REGIME STATIONNAIRE.

Dans le cas d'un régime stationnaire, les champs Eulériens ne dépendent pas du temps : $\vec{V}\left(\vec{r},t\right)=\vec{V}\left(\vec{r}\right)$; $P\left(\vec{r},t\right)=P\left(\vec{r}\right)$, …

⇒ Les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles.

⇒ Dans ce type d'écoulement, la vitesse du fluide en un point M est constante.

⇒ Les trois courbes définies précédemment sont confondues.

En régime stationnaire, lignes de courant, trajectoire et lignes d'émission sont confondues.

III. DERIVEE PARTICULAIRE.

1. DERIVEE LOCALE.

En un point M du fluide, on peut définir différentes grandeurs macroscopiques locales comme $P(\vec{r},t)$,$\vec{V}(\vec{r},t)$, $\mu(\vec{r},t)$…

⇒ En M ces grandeurs peuvent varier dans le temps : $\begin{cases} dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt \\ d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial t}dt \\ d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}dt \end{cases}$

⇒ On parle de variation locale de la grandeur : celle-ci est due uniquement aux variations du temps.
Notons que les valeurs de $P(\vec{r},t)$ et $P(\vec{r},t+dt)$ ne concernent pas la même particule fluide.

2. DERIVEE PARTICULAIRE.

On peut s'intéresser à la variation d'une grandeur macroscopique locale de la particule fluide, qui à l'instant t est en M, lorsque l'on suit le mouvement de cette particule fluide. Prenons par exemple la masse volumique μ :

A l'instant t, la particule fluide est en M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ et sa masse volumique est $\mu(\vec{r},t)$

A l'instant t+dt, la particule fluide est en M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \vec{r'} = \vec{r} + \underbrace{\overrightarrow{dr}}_{\vec{V}(\vec{r},t)dt} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx = V_x(\vec{r},t)dt \\ dy = V_y(\vec{r},t)dt \\ dz = V_z(\vec{r},t)dt \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \begin{vmatrix} x + V_x(\vec{r},t)dt \\ y + V_y(\vec{r},t)dt \\ z + V_z(\vec{r},t)dt \end{vmatrix}$$

⇒ La masse volumique à t+dt de la particule fluide est donc $\mu\left(\vec{r'},t+dt\right) = \mu\left(\vec{r}+\overrightarrow{dr},t+dt\right)$

⇒ Pour calculer la variation de μ, calculons la différence $\mu\left(\vec{r}+\overrightarrow{dr},t+dt\right) - \mu(\vec{r},t)$:

$$\begin{aligned} d\mu &= \mu\left(\vec{r}+\overrightarrow{dr},t+dt\right) - \mu(\vec{r},t) \\ &= \mu(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt) - \mu(x,y,z,t) \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial x}dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}dy + \frac{\partial \mu}{\partial z}dz + \frac{\partial \mu}{\partial t}dt = \frac{\partial \mu}{\partial x}V_x dt + \frac{\partial \mu}{\partial y}V_y dt + \frac{\partial \mu}{\partial z}V_z dt + \frac{\partial \mu}{\partial t}dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial x}V_x + \frac{\partial \mu}{\partial y}V_y + \frac{\partial \mu}{\partial z}V_z}_{\vec{V}.\overrightarrow{grad}(\mu)} + \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

Sachant que pour souligner la différence avec la dérivée locale, on utilise souvent la notation $\frac{D\mu}{Dt}$:

$\frac{D\mu}{Dt} = \vec{V}\,.\overrightarrow{grad}\,(\mu) + \frac{\partial \mu}{\partial t}$ Dérivée particulaire de la masse volumique

GENERALISATION :

La dérivée particulaire d'un champ scalaire $X(\vec{r}, t)$ s'écrit : $\frac{DX}{Dt} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)X + \frac{\partial X}{\partial t}$

– $\left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)X$ est la dérivée convective de X : son origine vient du fait que la particule fluide s'est déplacée.

– $\frac{\partial X}{\partial t}$ est la dérivée locale de X .

3. ACCELERATION PARTICULAIRE.

Parmi les grandeurs attachées à une particule fluide se trouve la vitesse : suivre les variations de cette vitesse au cours du mouvement de la particule fluide c'est calculer son accélération particulaire.

Sachant que $\vec{V}$ est un vecteur, on déterminera la dérivée particulaire des composantes de $\vec{V}$:

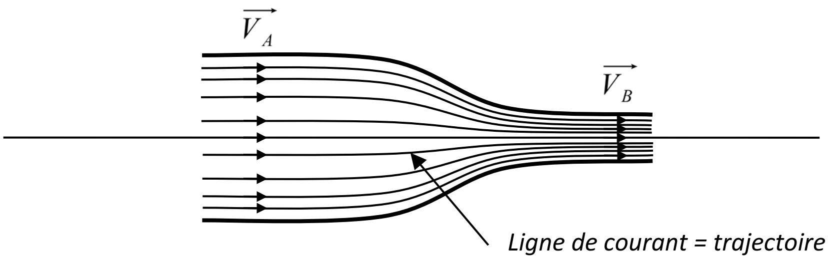
$$\vec{a} = \left|\begin{array}{l} a_x = \frac{DV_x}{Dt} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)(V_x) + \frac{\partial V_x}{\partial t} \\ a_y = \frac{DV_y}{Dt} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)(V_y) + \frac{\partial V_y}{\partial t} \\ a_z = \frac{DV_z}{Dt} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)(V_z) + \frac{\partial V_z}{\partial t} \end{array}\right.$$

D'où :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{V}}_{\vec{a}_{convective}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\vec{a}_{locale}} \quad \text{Accélération particulaire}$$

ETUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS :

- Ecoulement permanent : $\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\vec{a}_{locale}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_{convective} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{V}$



- Ecoulement uniforme : $\vec{V} = \vec{V}(t) \Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\vec{a}_{locale}}$

AUTRE EXPRESSION DE $\vec{a}_{convective}$:

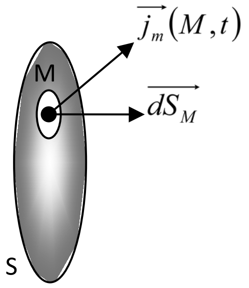
$$\vec{a}_{convective} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{V} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) \wedge \vec{V}$$

IV. Conservation de la masse.

Etudions la relation entre les deux champs $\vec{V}(\vec{r},t)$ et $\mu(\vec{r},t)$.

1. Debit massique – Vecteur densite de courant de masse.

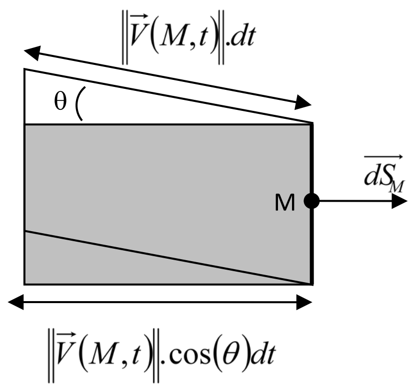
a. Flux de masse a travers une surface = Debit massique.

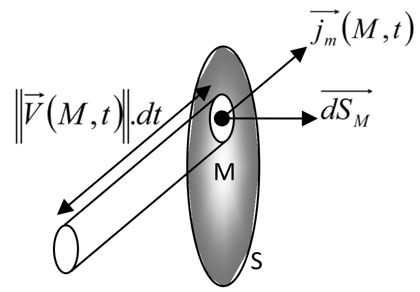


Soit $\vec{j}_m(M,t)$, le vecteur densité de courant de masse alors le flux de masse à travers la surface S, égal aussi au débit de masse à travers S, est : $\Phi = D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_S \vec{j}_m(M,t).\overrightarrow{dS_M}$ où dm est la masse traversant la surface S pendant dt.

b. Expression de $\vec{j}_m(M,t)$:

Soit $d^2\Phi = \frac{d^3m}{dt} = \vec{j}_m(M,t).\overrightarrow{dS_M}$ le flux de masse à travers la surface dS_M où d^3m est la masse traversant la surface dS_M pendant dt.
$\Rightarrow d^3m = \mu(M,t)d\tau$ où dτ est le volume du cylindre comprenant la masse qui traversera la surface dS_M entre t et t +dt.





$\Rightarrow d\tau = \underbrace{\left\|\vec{V}(M,t)\right\|.dS_M.\cos(\theta)}_{\vec{V}(M,t).\overrightarrow{dS}_M}.dt \Rightarrow d^3m = \mu(M,t).\vec{V}(M,t).\overrightarrow{dS}_M.dt$

$\Rightarrow d^2\Phi = \frac{d^3m}{dt} = \mu(M,t).\vec{V}(M,t).\overrightarrow{dS}_M$

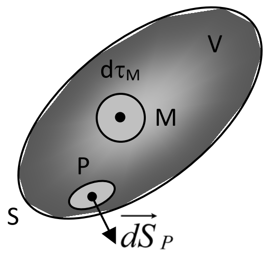
$\Rightarrow$ En comparant cette expression avec $d^2\Phi = \frac{d^3m}{dt} = \vec{j}_m(M,t).\overrightarrow{dS_M}$, on obtient : $\vec{j}_m(M,t) = \mu(M,t).\vec{V}(M,t)$

Le vecteur densité de courant de masse est $\vec{j}_m(M,t) = \mu(M,t).\vec{V}(M,t)$ et le flux de $\vec{j}_m(M,t)$ à travers une surface S est :

$$\Phi = D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_S \vec{j}_m(M,t).\overrightarrow{dS}_M$$

2. EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE.

Soit une portion de fluide de masse m(t) et de volume V constant.



A l'instant t, on a : $m(t) = \iiint_V \mu(M,t).d\tau_M$ et à l'instant t + dt, on a :

$$m(t+dt) = \iiint_V \mu(M,t+dt).d\tau_M$$

⇒ La variation de masse pendant dt est donc :

$$dm = m(t+dt) - m(t) = \iiint_V \left(\underbrace{\mu(M,t+dt) - \mu(M,t)}_{\left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} dt} \right).d\tau_M$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \iiint_V \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t}.d\tau_M$$

De plus, **<u>d'après la conservation de la masse</u>** : la masse ***entrant*** dans V pendant dt est donnée par Φ :

$$\Phi = D_m = \oiint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\left(-\overrightarrow{dS}_P\right)$$

La loi de conservation de la masse donne alors :

$$\frac{dm}{dt} = \Phi \text{ soit : } \oiint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\left(-\overrightarrow{dS}_P\right) = \iiint \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} d\tau_M$$

$\oiint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\overrightarrow{dS}_P + \iiint \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} d\tau_M = 0$ Equation intégrale de conservation de la masse

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on peut écrire : $\oiint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\left(\overrightarrow{dS}_P\right) = \iiint div_M\left(\overrightarrow{j_m}\right).d\tau_M$

$div_M\left(\overrightarrow{j_m}\right) + \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} = 0$ ou $div_M\left(\mu.\vec{V}\right) + \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} = 0$ Equation locale de conservation de la masse

Sachant que $div_M\left(\mu.\vec{V}\right) = \mu.div_M\left(\vec{V}\right) + \overrightarrow{grad}(\mu).\vec{V}$ et que $\frac{D\mu}{Dt} = \vec{V}.\overrightarrow{grad}(\mu) + \frac{\partial \mu}{\partial t}$, on peut également écrire l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$\mu.div_M(\vec{V}) + \left.\frac{D\mu}{Dt}\right)_{M,t} = 0$ Equation locale de conservation de la masse

3. REGIME STATIONNAIRE.

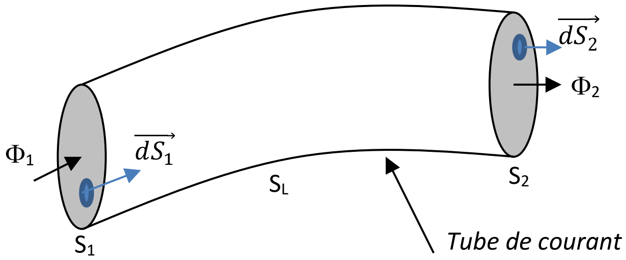
Dans le cas d'un régime stationnaire, on a : $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow D_m = \oint\!\!\oint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\overrightarrow{dS_P} = 0$ et $div_M\left(\overrightarrow{j_m}\right) = div_M\left(\mu.\vec{V}\right) = 0$

En régime stationnaire $\overrightarrow{j_m}$ est à flux conservatif : $div_M\left(\overrightarrow{j_m}\right) = div_M\left(\mu.\vec{V}\right) = 0$ ou $D_m = \oint\!\!\oint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\overrightarrow{dS_P} = 0$

CONSEQUENCES :

- Le flux de $\overrightarrow{j_m}$ à travers une surface fermée (et donc le débit massique) est nul
- Le flux de $\overrightarrow{j_m}$ dans un tube de courant est constant :



Soit $\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{j}_m.\overrightarrow{dS_1}$ le débit massique à travers S_1 et $\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{j}_m.\overrightarrow{dS_2}$ le débit massique à travers S_2

Soit $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L$, Σ est une surface fermée

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \vec{j}_m.\overrightarrow{d\Sigma} = 0 = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{j}_m.\overrightarrow{dS_1}}_{-\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{j}_m.\overrightarrow{dS_2}}_{\Phi_2} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{j}_m.\overrightarrow{dS_L}}_{0} \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

4. TERMES DE SOURCES.

Soit un volume V de fluide tel qu'il existe en tout point un terme $q(M,t)$, appelé terme de source correspondant à la masse crée en M par unité de temps et de volume.

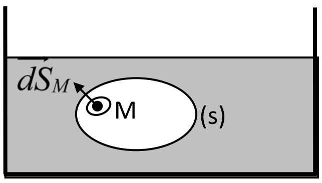
$\Rightarrow Q = \iiint_V q(M,t)d\tau_M$ est la masse créée dans V par unité de temps.

Le bilan de masse devient alors :

$$\oint\!\!\oint_S \overrightarrow{j_m}(P,t).\overrightarrow{dS_P} + \iiint \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} d\tau_M = Q \text{ ou } div_M\left(\overrightarrow{j_m}\right) + \left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{M,t} = q$$

V. FORCES SPECIFIQUES AUX FLUIDES.

Soit (S) une portion de fluide délimitée par une surface fictive fermée.



$\Rightarrow$ On étudie les forces de surface s'exerçant sur (S)

$\Rightarrow$ La résultante des forces s'exerçant sur la surface $\overrightarrow{dS_M}$ est $\overrightarrow{dF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{dF}$ Peut-être décomposée en :

- Une composante normale $\overrightarrow{dF}_N$ (colinéaire à $\overrightarrow{dS_M}$).
- Une composante tangentielle $\overrightarrow{dF}_T$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{dS_M}$).

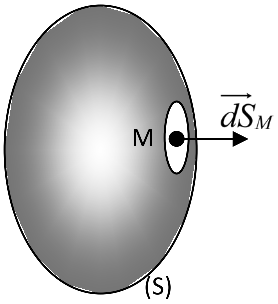
1. FORCE DE PRESSION.

a. DEFINITION.

La composante normale $\overrightarrow{dF}_N$ est appelée force de pression :

elle est proportionnelle à $\left\|\overrightarrow{dS_M}\right\|$ et est dirigée de l'extérieur de (S) vers **l'intérieur** de (S).

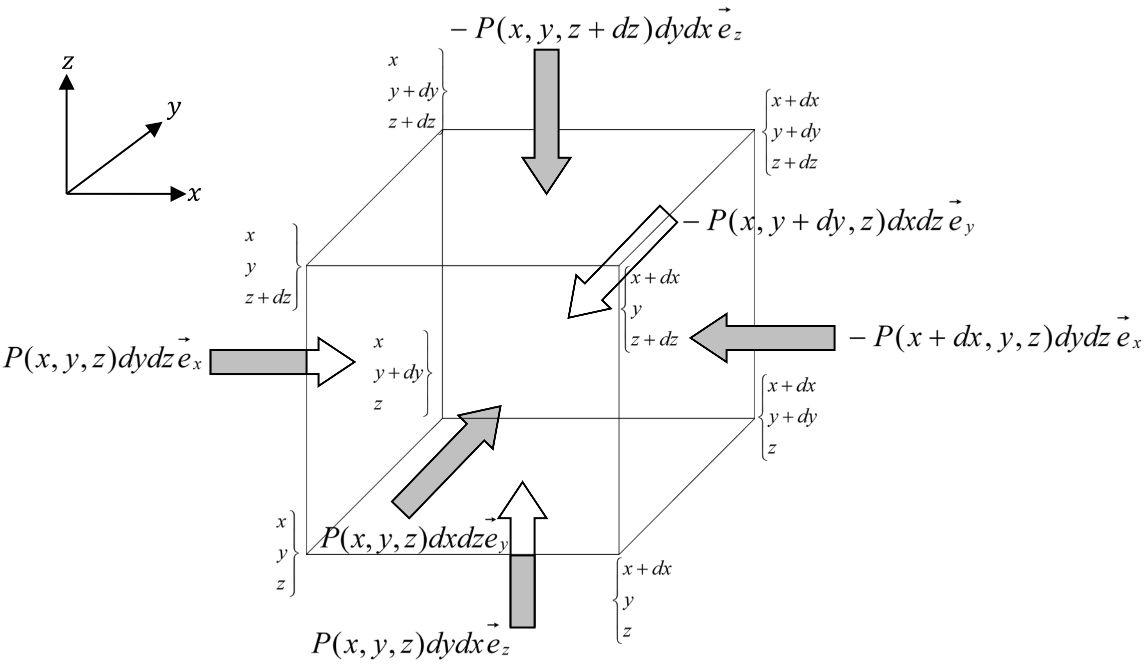
⇒ La force exercée par le fluide sur $\overrightarrow{dS_M}$ est donc :$\overrightarrow{dF}_N\,(M,t) = -P(M,t).\overrightarrow{dS_M}$



b. FORCE DE PRESSION EXERCEE SUR UNE PARTICULE FLUIDE.

Soit une particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dx.dy.dz$, déterminons la résultante des forces de pression exercée sur la particule fluide.

$$\Rightarrow \overrightarrow{dF}_N = \left|\begin{array}{l}\big(P(x,y,z) - P(x+dx,y,z)\big)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau \\ \big(P(x,y,z) - P(x,y+dy,z)\big)dxdz = -\frac{\partial P}{\partial y}d\tau \\ \big(P(x,y,z) - P(x,y,z+dz)\big)dydx = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau\end{array}\right.$$



⇒ La résultante des forces de pression s'exerçant sur la particule fluide est donc équivalente à une force volumique :

$\vec{f}_{v,pression} = \frac{\overrightarrow{dF_N}}{d\tau} = -\overrightarrow{grad}\,(P)$ Résultante (volumique) des forces de pression.

La force massique correspondante est donc :

$$\vec{f}_{m,pression} = \frac{\vec{f}_{v,pression}}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\overrightarrow{grad}\,(P)$$ Résultante (massique) des forces de pression

c. EQUILIBRE DE LA PARTICULE FLUIDE.

Lorsque la particule fluide est en équilibre sous l'action des forces pressantes décrites précédemment et de forces de volumes s'écrivant $\overrightarrow{dF}_v = \vec{f}_v\,d\tau$, on a : $\overrightarrow{dF}_v + \overrightarrow{dF}_N = \vec{0}$

$$\vec{f}_v = \overrightarrow{grad}\,(P)$$ Equilibre d'une particule fluide

EXEMPLE DE FORCES DE VOLUME :

- Le poids : $\overrightarrow{dF}_v = dm.\vec{g} = \mu\,\vec{g}\,d\tau \Rightarrow \vec{f}_v = \mu\,\vec{g}$
- La force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{dF}_v = -dm.\vec{a}_e = -\mu\,\vec{a}_e\,d\tau \Rightarrow \vec{f}_v = -\mu\,\vec{a}_e$

EQUILIBRE D'UNE PARTICULE FLUIDE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR :

D'après ce qui précède, on a : $\mu\,\vec{g} = \overrightarrow{grad}\,(P)$

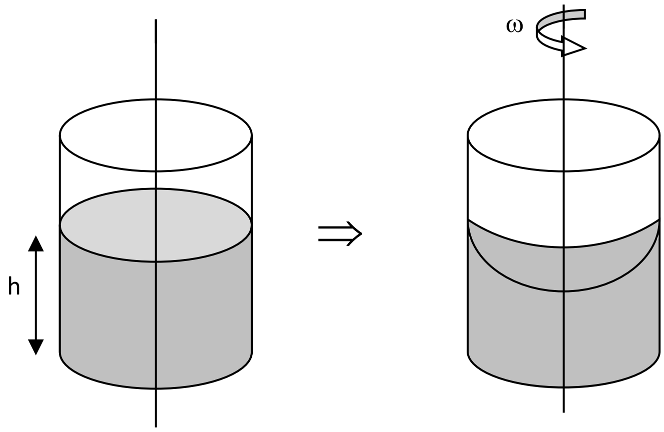
Soit, en prenant $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$: $\left|\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation fondamentale de la statique des fluides vue en SUP : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$

Exercice :

Equilibre de la particule fluide dans le champ de pesanteur dans un référentiel non galiléen.

Soit un liquide incompressible de masse volumique μ, contenu dans un cylindre de rayon R, ouvert en rotation à la vitesse angulaire ω constante. La pression extérieure étant P_o : Déterminer l'équation de la surface libre.



D'après ce qui précède, on a : $\mu\,\vec{g} - \mu\,\vec{a}_e = \overrightarrow{grad}\,(P)$ avec $\vec{a}_e = -\omega^2 r\,\vec{e}_r$

Soit, en coordonnées cylindriques : $\left|\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial r} = \mu\omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g \end{array}\right. \Rightarrow dP = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial P}{\partial z}dz = \mu\omega^2 r dr - \mu g dz$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \mu g z + Cste$

Au niveau de la surface libre, la pression est égale à P_o la pression atmosphérique.

$\Rightarrow P_o = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \mu g z + Cste$ est donc l'équation de la surface libre : Il s'agit d'un paraboloïde de révolution.

Pour déterminer complètement cette équation, on trouve l'expression de Cste en utilisant la conservation du volume de liquide (avant et après la mise en rotation) :

$$\pi R^2 h = \iiint_{\substack{volume\\ de fluide\\ en rotation}} r dr d\theta dz = \int_{r=0}^{R} 2\pi r. z(r). dr \text{ où } z(r) = \frac{1}{\mu g}\left(\frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + Cste - P_o\right)$$

$$\Rightarrow \pi R^2 h = \frac{2\pi}{\mu g}\int_{r=0}^{R}\left(\frac{1}{2}\mu\omega^2 r^3 + Cste.r - P_o.r\right) dr = \frac{2\pi}{\mu g}\left[\frac{1}{8}\mu\omega^2 r^4 + \frac{1}{2}Cste.r^2 - \frac{1}{2}P_o.r^2\right]_0^R$$

$$\Rightarrow \pi R^2 h = \frac{2\pi}{\mu g}\left(\frac{1}{8}\mu\omega^2 R^4 + \frac{1}{2}Cste.R^2 - \frac{1}{2}P_o.R^2\right)$$

$\Rightarrow h = \frac{1}{\mu g}\left(\frac{1}{4}\mu\omega^2 R^2 + Cste - P_o\right)$ soit $Cste = \mu g h - \frac{1}{4}\mu\omega^2 R^2 + P_o$

D'où l'équation de la surface libre : $0 = \frac{1}{2}\mu\omega^2\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right) - \mu g(z - h)$

Notons que pour $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$, on a $z = h$

2. Forces de viscosite.

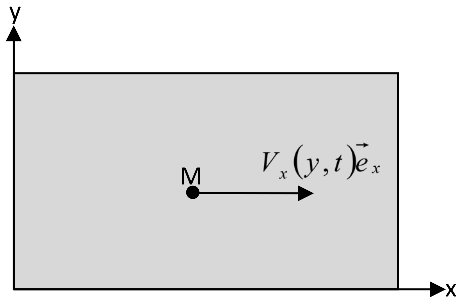
a. Loi de Newton.

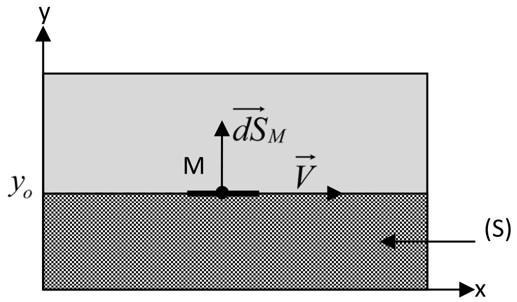
La composante tangentielle $\overrightarrow{dF}_T$ de la force $\overrightarrow{dF}$ est liée à la viscosité du fluide.

$\Rightarrow$ Elle intervient dans les fluides réels visqueux et n'intervient pas dans les fluides parfaits.

Dans un fluide visqueux, le glissement des particules fluides les unes par rapport aux autres s'effectue avec frottement.

Pour modéliser cette force, on se place à une dimension et on suppose que l'écoulement se fait dans la direction (Ox) : $\vec{V}(M,t) = V_x(y,t)\,\vec{e}_x$





La portion de fluide (S) sur laquelle s'exercent les forces tangentielles est celle située entre les plans de cotes y=0 et y=y_o. Soit un point M appartenant à la surface délimitant (S) dans le plan y=y_o et soit $\overrightarrow{dS}_M$ la surface élémentaire centrée en M.

Alors la force exercée sur $\overrightarrow{dS}_M$ par le fluide situé **au-dessus** est :

- ✓ Suivant $\vec{e}_x$
- ✓ Proportionnelle à dS_M
- ✓ Proportionnelle à $\left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{yo}$ (d'autant plus forte que le gradient de vitesse est important)

Loi de Newton :

$\overrightarrow{dF}_T = \eta \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{yo} dS_M \vec{e}_x$: Force exercée par le fluide situé **au-dessus** de dS_M

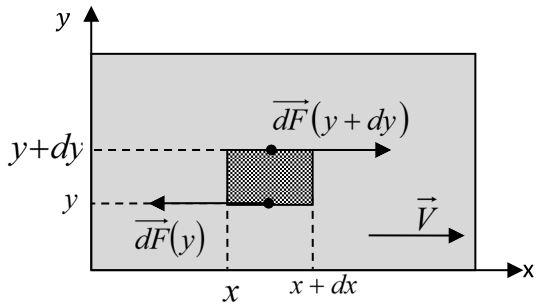
Où η est la viscosité dynamique exprimée en $kg/m/s$ou en poiseuille (1pl = **Pa.s** =1 kg/m/s)

Exemple de valeurs de η :

Corps	Eau	Air	Glycérine
η (pl)	10^{-3}	10^{-5}	1,4

b. Forces volumiques de viscosite.

Reprenons le cas de l'écoulement précédent et considérons la particule fluide de volume $d\tau = dx.dy.dz$ comprise entre les cotes y et $y + dy$:



La particule fluide est donc soumise à deux forces tangentielles :

$\overrightarrow{dF}(y + dy) = \eta \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y+dy} dxdz\, \vec{e}_x$ et $\overrightarrow{dF}(y) = -\eta \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_y dxdz\, \vec{e}_x$

⇒ La résultante de ces deux forces tangentielles est appelée force de viscosité :

$$\overrightarrow{dF}_{vis\cos ité} = \eta \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y+dy} dxdz\, \vec{e}_x - \eta \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_y dxdz\, \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{dF}_{vis\cos ité} = \eta \underbrace{\left(\left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_y \right)}_{\left.\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right) dy} dxdz\vec{e}_x = \eta \left.\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right) d\tau \vec{e}_x$$

La force de viscosité volumique pour un écoulement à une dimension ($\vec{V}(M,t) = V_x(y,t)\,\vec{e}_x$) est :

$$\vec{f}_{v,vis\cos ité} = \frac{\overrightarrow{dF}_{vis\cos ité}}{d\tau} = \eta \left.\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right) \vec{e}_x$$

En généralisant à trois dimensions, on obtient :

$$\vec{f}_{v,vis\cos ité} = \frac{\overrightarrow{dF}_{vis\cos ité}}{d\tau} = \eta\, \vec{\Delta}\left(\vec{V}\right)$$ Force de viscosité (volumique)

Notons que l'on définit également la force de viscosité massique :

$\vec{f}_{m,vis\cos ité} = \frac{\vec{f}_{v,vis\cos ité}}{\mu} = \underbrace{\frac{\eta}{\mu}}_{\sigma} \vec{\Delta}\left(\vec{V}\right) = \sigma\, \vec{\Delta}\left(\vec{V}\right)$ où σ est la viscosité cinématique exprimée en m²/s

$$\vec{f}_{m,vis\cos ité} = \sigma \vec{\Delta}(\vec{V})$$ Force de viscosité (massique)

Où : $\sigma = \frac{\eta}{\mu}$ est la **Viscosité cinématique** exprimée en m²/s