Cordes vibrantes

I. Équation de propagation

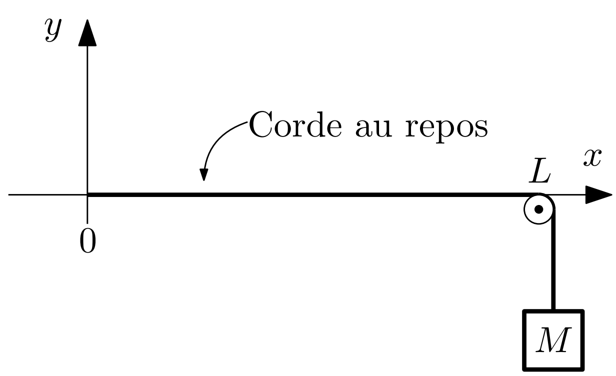
1. Hypothèses et modèle

- On considère une corde de masse linéique μ, de longueur L et de section de rayon r.
- La corde est considérée sans raideur . En toute rigueur, à cause de l'élasticité du matériau, il faudrait prendre en compte la raideur de la corde. Ceci est surtout vrai pour les cordes de grande section ($L \gg \sqrt{S}$ non vérifiée). Dans ce cas-là, il faut rajouter un couple :

$$\Gamma(x,t) = \frac{\pi r^2}{4} E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Cela revient à rajouter un terme en $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ dans l'équation de propagation.

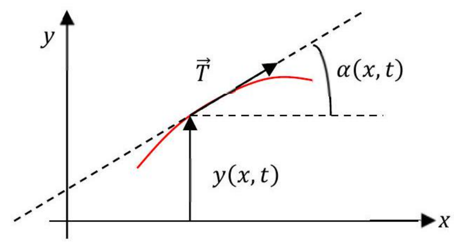
- On néglige les effets de la pesanteur (attention cela ne signifie pas que la masse de la corde soit nulle !)
- On néglige le couplage de la corde avec l'air. Dans le cas contraire, ce couplage se traduit par une force de frottement visqueux.
- La corde est tendue par une tension $\vec{T}$. Cette tension peut être fixée par une masse fixée à l'une des extrémités de la corde :



Avec :

$$T_0 = Mg$$

- On étudie de part et d'autre de la position d'équilibre les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, en admettant qu'un élément de corde en $\boldsymbol{x}$ au repos reste à la même abscisse $\boldsymbol{x}$ à l'instant t. L'élongation est notée $y(x,t)$.
- La tension $\vec{T}$ est définie comme étant la force s'exerçant en x à l'instant t par la partie de corde située à droite de x sur la partie de la corde située à gauche de x.
- La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x,t)$.

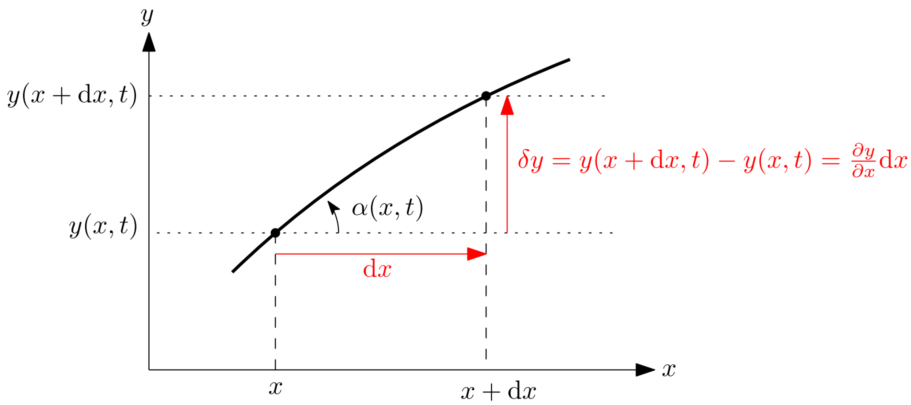


- Un élément de longueur de la corde est alors donné par :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}x^2\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) = \mathrm{d}x^2\left(1+\alpha^2\right) \cong \mathrm{d}x^2$$

Car,

$$\tan\alpha \cong \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} << 1$$



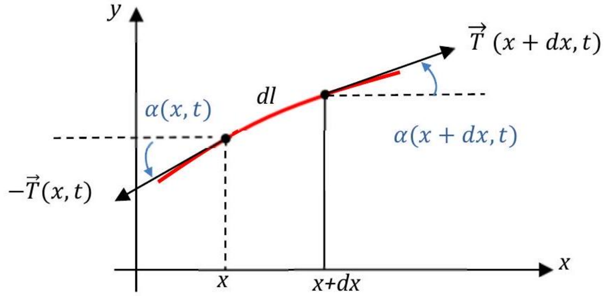
- Au premier ordre en α, on a donc :

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$$

2. Équation de propagation

- Le principe fondamental de la dynamique pour un élément de longueur $\mathrm{d}l = \mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$ de la corde donne :

$$\mu\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \vec{T}(x+\mathrm{d}x) - \vec{T}(x)$$



✘ En projection sur Ox, on a :

$$0 = (T\cos\alpha)(x + \mathrm{d}x, t) - (T\cos\alpha)(x,t)$$

$\Rightarrow T\cos\alpha = C^{ste} = T_0$

✘ En projection sur Oy, on a :

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T\sin\alpha)(x+\mathrm{d}x,t) - (T\sin\alpha)(x,t) = \frac{\partial T\sin\alpha}{\partial x}\mathrm{d}x$$
$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T\sin\alpha}{\partial x} = \underbrace{T\cos\alpha}_{T_0}\frac{\partial\tan\alpha}{\partial x} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

✘ On en déduit l'équation de propagation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\ \text{avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

3. Grandeurs couplées, impédance caractéristique

✘ Pour déterminer les grandeurs couplées partons des équations qui nous ont permis d'établir l'équation d'onde :

☛ première équation :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T\sin\alpha}{\partial x} \Rightarrow \mu\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial T_g}{\partial x} \text{ où } v = \frac{\partial y}{\partial t} \text{ et } T_g = -T\sin\alpha = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}$$

☛ deuxième équation :

$$T\sin\alpha = T_0\frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T_g}{\partial t} = -T_0\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Les grandeurs couplées dons le cas de la corde vibrante sont : v et T_g

✘ Plaçons-nous dans le cas d'une OPP+, telle que :

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow \mu\frac{\partial v}{\partial t} = \mu f'\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{\partial\left(T_g\right)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow T_g = \mu c.f\left(t - \frac{x}{c}\right) + h(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_g}{\partial t} = \mu c.f'\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -T_0\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{T_0}{c}f'\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow h = cste = 0$$

on a donc :

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ et } T_g = Z_c \cdot f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

où :

$$Z_c = \mu c = \sqrt{T_0 \mu}$$

- Pour une OPP(-) [1], on aura donc :

$$v = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \text{ et } T_g = -Z_c.g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

- Dans un cas général, on aura donc :

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

et,

$$T_g = Z_c\left(f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

II. Approche énergétique

1. Équation de conservation

a. Bilan d'énergie

- De manière générale, on peut définir pour tout phénomène de propagation un vecteur $\vec{R}$ qui traduit la propagation de l'énergie : il s'agit du vecteur densité de courant de propagation d'énergie de l'onde. Nous allons voir son expression dans le cas des cordes vibrantes.
- Ici on définit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{R}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{T}_g} \cdot \vec{V}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_x = -(\overrightarrow{\boldsymbol{T}} \cdot \vec{V})\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_x = \text{ vecteur densité de courant d'énergie de l'onde.}$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}\| \text{ est homogène à une puissance}$$

avec :

$$\vec{R} = -T\sin\alpha\frac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_x = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_x$$

1. Si l'on avait choisi comme grandeurs couplées v et $+T\sin\alpha$, le signe moins serait affecté à l'OPP(+)

✘ Pour comprendre la signification physique de $\vec{R}$, calculons :

$$\text{div}\,\vec{R} = \frac{\partial R}{\partial x} = -T_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -T_0\left(\frac{1}{c^2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$$

On obtient l'équation de conservation de l'énergie mécanique (linéique) de la corde :

$$\text{div}\,\vec{R} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique par unité de longueur de la corde, et le second à son énergie potentielle par unité de longueur (Attention, il s'agit de grandeurs d'ordre 2) :

- ☛ $e_c = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ = densité d'énergie cinétique de la corde (en J/m)
- ☛ $e_p = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ = densité linéique d'énergie potentielle de la corde (en J/m)

⇒ On a donc la relation :

$$\text{div}\,\vec{R} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

où :

$$\vec{R} = \left(\vec{T_g}\cdot\vec{V}\right)\vec{e}_x = -(\vec{T}\cdot\vec{V})\vec{e}_x = \text{ vecteur densité de courant d'énergie de l'onde.}$$

Et :

$$e = e_c + e_p = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \text{ densité linéique d'énergie de la corde}$$

⇒ On retrouve la forme classique d'une équation de conservation.

b. Cas d'une OPP(+)

✘ Pour une onde progressive, telle que $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{T_0}\right)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

⇒ Pour une OPP+ , on a donc :

$$e_c = e_p = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

et :

$$e = \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

✘ De plus :

$$\operatorname{div}\vec{R} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] = c\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]$$

car :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow R = Z_c\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

c. Cas d'une OPP(-)

✘ pour une onde régressive, telle que $y = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ on aura également :

$$e_c = e_p = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

et :

$$e = \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

✘ De plus :

$$\operatorname{div}\vec{R} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] = -c\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] \text{ car } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$\Rightarrow R = -Z_c\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

2. Calcul direct des densités d'énergie

a. Énergie cinétique

L'énergie cinétique de l'élément de longueur dx est :

$$\mathrm{d}E_c = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ La densité d'énergie cinétique vaut :

$$e_c = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

b. Énergie potentielle

[2]

- ✘ L'élément de longueur dx au repos, a une longueur :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \mathrm{d}x \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \text{ au passage de l'onde.}$$

⇒ L'allongement de l'élément de longueur est donc :

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}s - \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

- ✘ Le travail que doit fournir un opérateur pour faire passer l'élément de longueur dx de la corde, de la longueur dx à la longueur ds, vaut donc :

$$\delta W_{op} = T\mathrm{d}l = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{d}E_p$$

- ✘ La densité linéique d'énergie potentielle est donc :

$$e_p = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

c. Calcul direct de $\overrightarrow{R}$

- ✘ On part de la définition de $\vec{R}(x,t)$:

$\overrightarrow{R}(x,t)$ est la puissance reçue par l'élément de corde situé à droite de x à l'instant t

puis on fait un bilan de puissance sur un élément de longueur dx situé entre x et $x + \mathrm{d}x$

- ✘ Bilan en utilisant $\vec{R}(x,t)$:

$$\mathrm{d}P = \vec{R}(x,t) - \vec{R}(x+\mathrm{d}x,t) = -\frac{\partial \vec{R}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

- ✘ Bilan en utilisant $\vec{T}(x,t)$:

$$\mathrm{d}P = (\vec{V}\cdot(-\vec{T}))_{x,t} + (\vec{V}\cdot\vec{T})_{x+\mathrm{d}x,t} = -\frac{\partial(-\vec{V}\cdot\vec{T})}{\partial x}\mathrm{d}x$$

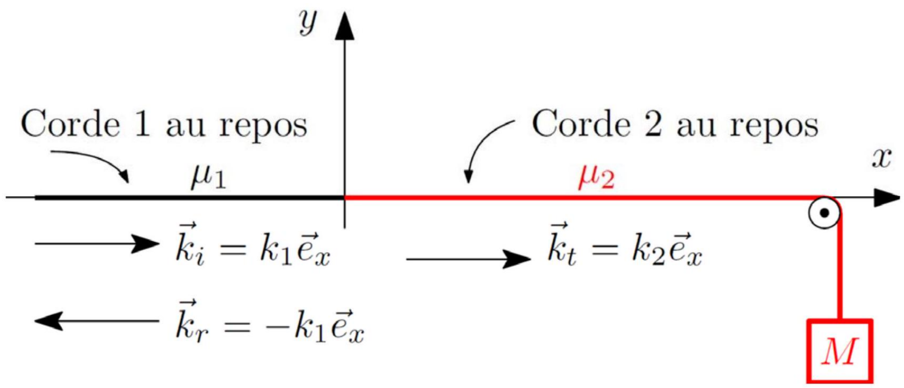
- ✘ Par indentification, on obtient :

$$\vec{R} = -(\vec{V}\cdot\vec{T})\vec{e}_x$$

2. Attention ! on travaille à l'ordre 2 (grandeurs énergétiques)

III. Réflexion - transmission

On étudie la réflexion et la transmission d'une OPPM(+) à l'interface entre deux cordes de densité linéiques différentes.



1. Calcul en utilisant les impédances

- Supposons qu'une OPPM, de pulsation ω, se propage sur une corde, soumise à une tension T, d'impédance Z_1 et rencontre sur son chemin un changement brutal de milieu, en $x = 0$, passant à une corde l'impédance Z_2.
  Avec :

$$Z_1 = \mu_1 c_1 = \sqrt{\mu_1 T}$$
$$Z_2 = \mu_2 c_2 = \sqrt{\mu_2 T}$$

- Ce changement de milieu va donner naissance, en plus de l'onde progressive normale (incidente), à une onde transmise et une onde réfléchie :

$$\underline{v}_i(x,t) = A\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{v}_r(x,t) = A\underline{r}\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{v}_t(x,t) = A\underline{t}\exp\left(j\left(\omega t - k_2 x\right)\right)$$
$$\underline{T}_{gi}(x,t) = AZ_1\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{T}_{gr}(x,t) = -AZ_1\underline{r}\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{T}_{gt}(x,t) = AZ_2\underline{t}\exp\left(j\left(\omega t - k_2 x\right)\right)$$

  Avec :

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}}$$
$$k_2 = \frac{\omega}{c_2} = \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}$$

- L'onde résultante pour $x \leq 0$ vaut donc :

$$\underline{v}_1(x,t) = \underline{v}_i(x,t) + \underline{v}_r(x,t) = A\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right) + A\underline{r}\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{T}_1(x,t) = \left(\underline{T}_{gi}(x,t)\right) + \left(\underline{T}_{gr}(x,t)\right) = AZ_1\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right) - AZ_1\underline{r}\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$

✘ L'onde résultante pour $x \geq 0$ vaut donc :

$$\underline{v}_2(x,t) = \underline{v}_t(x,t) = A\underline{t}\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{T}_2(x,t) = -\underline{T}_{gt}(x,t) = AZ_2\underline{t}\exp\left(j\left(\omega t - k_2 x\right)\right)$$

✘ On utilise la continuité de la vitesse et de la tension en $x = 0$:

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

✘ On utilise également la continuité de la tension en $x = 0$:

$$Z_1(1 - \underline{r}) = Z_2\underline{t}$$

D'où :

$$\underline{r} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } \underline{t} = t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

2. Calcul sans utiliser les impédances

✘ Le changement de milieu va donner naissance, en plus de l'onde progressive normale (incidente), à une onde transmise et une onde réfléchie :

$$\underline{y_i}(x,t) = A\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{y_r}(x,t) = A\underline{r}\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$
$$\underline{y}_t(x,t) = A\underline{t}\exp\left(j\left(\omega t - k_2 x\right)\right)$$

✘ L'onde résultante pour $x \leq 0$ vaut donc :

$$\underline{y}_1(x,t) = \underline{y}_i(x,t) + \underline{y}_r(x,t) = A\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right) + A\underline{r}\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$

✘ L'onde résultante pour $x \geq 0$ vaut donc :

$$\underline{y}_2(x,t) = \underline{y}_t(x,t) = A\underline{t}\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right)$$

✘ On utilise la continuité du déplacement et de la tension en $x = 0$:

$$\underline{y}_1(0,t) = \underline{y_2}(0,t)$$
$$\underline{y_i}(0,t) + \underline{y_r}(0,t) = \underline{y}_t(0,t)$$
$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

Et :

$$\left.\frac{\partial T_y}{\partial x}\right)_{0^-,t} = \left.\frac{\partial \underline{T_y}}{\partial x}\right)_{0^+,t}$$

$$\left.\frac{\partial \underline{y_1}}{\partial x}\right)_{0^-,t} = \left.\frac{\partial \underline{y_2}}{\partial x}\right)_{0^+,t}$$

$$\left.\frac{\partial \underline{y_i}}{\partial x}\right)_{0^-,t} + \left.\frac{\partial \underline{y_t}}{\partial x}\right)_{0^-,t} = \left.\frac{\partial \underline{y_t}}{\partial x}\right)_{0^+,t}$$

$$k_1(1-\underline{r}) = k_2\underline{t}$$

D'où :

$$\underline{r} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } \underline{t} = t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

3. Approche énergétique

- D'un point de vue énergétique, on a :

$$\langle R_i \rangle = \mathrm{Re}\left(\underline{R_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{T_{gi}}\right)\left(\underline{v_i^*}\right) = \frac{1}{2}Z_1\left(\underline{v_i}\right)\left(\underline{v_i^*}\right) = \frac{1}{2}Z_1 A^2$$
$$\langle R_r \rangle = \mathrm{Re}\left(\underline{R_r}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{T_{gr}}\right)\left(\underline{v_r^*}\right) = \frac{1}{2}Z_1\left(\underline{v_r}\right)\left(\underline{v_r^*}\right) = \frac{1}{2}Z_1 A^2|\underline{r}|^2$$
$$\langle R_t \rangle = \mathrm{Re}\left(\underline{R_t}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{T_{gt}}\right)\left(\underline{v_t^*}\right) = \frac{1}{2}Z_2\left(\underline{v_t}\right)\left(\underline{v_t^*}\right) = \frac{1}{2}Z_2 A^2|\underline{t}|^2$$

- D'où les coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$R = \frac{\langle R_r \rangle}{\langle R_i \rangle} = |\underline{r}|^2$$
$$T = \frac{\langle R_t \rangle}{\langle R_i \rangle} = \frac{Z_2}{Z_1}|\underline{t}|^2$$

- On vérifie aisément que [3] :

$$R + T = 1$$

Ainsi :

- Si $Z_1 = Z_2, R = 0$ et $\underline{r} = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie
- Si $Z_1 \gg Z_2, R = 1$ et $\underline{r} = 1$: il n'y a pas d'onde transmise
- Si $Z_1 \ll Z_2, R = 1$ et $\underline{r} = -1$: il n'y a pas d'onde transmise

3. Ce qui traduit la conservation de l'énergie. Attention ! on a donc : $\underline{r} + \underline{t} \neq 1$

IV. Ondes stationnaires

- On reprend l'exemple précédent et on étudie le comportement de l'onde dans le cas où $r > 0$ en se concentrant sur le milieu $1(x < 0)$.
- Dans le milieu 1 , l'onde totale va s'écrire :

$$\underline{v_1}(x,t) = A\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right) + Ar\exp\left(j\left(\omega t + k_1 x\right)\right)$$

Soit :

$$\underline{v_1}(x,t) = 2Ar\cos k_1 x\exp(j\omega t) + (1-r)A\exp\left(j\left(\omega t - k_1 x\right)\right)$$

et donc :

$$v_1(x,t) = 2Ar\cos k_1 x\cos\omega t + (1-r)A\cos\left(\omega t - k_1 x\right)$$

- Il apparaît alors deux types d'ondes :
  - Une OPPM : $(1-r)A\cos\left(\omega t - k_1 x\right)$
  - Une onde dont les variables temporelles et spatiales sont découplées : c'est l'onde stationnaire.

$$2Ar\cos k_1 x\cos\omega t$$

- On définit alors un taux d'ondes stationnaires par le rapport des amplitudes de ces deux ondes, soit :

$$TOS = \frac{2r}{1-r}$$

- Les puissances transportées dans les deux milieux sont :

$$\underline{R}_1 = \frac{1}{2}\underline{T_1}\left(\underline{v_1}^*\right) = \frac{1}{2}Z_1A^2\left(1 - |\underline{r}|^2 - 2jr\sin\left(2k_1x + \phi\right)\right)$$

D'où :

$$\langle R_1\rangle = \mathrm{Re}\left(\underline{R}_1\right) = \frac{1}{2}Z_1A^2\left(1 - |\underline{r}|^2\right)$$

$$\langle R_2\rangle = \langle R_t\rangle = \mathrm{Re}\left(\underline{R}_t\right) = \frac{1}{2}Z_2\left(\underline{v_t}\right)\left(\underline{v_t^*}\right) = \frac{1}{2}Z_2A^2|\underline{t}|^2$$

- Dans le cas très courant où $r = 1$, (par exemple la corde lorsqu'elle est attachée en $x = 0$), on a une onde purement stationnaire pour $x < 0$ d'expression :

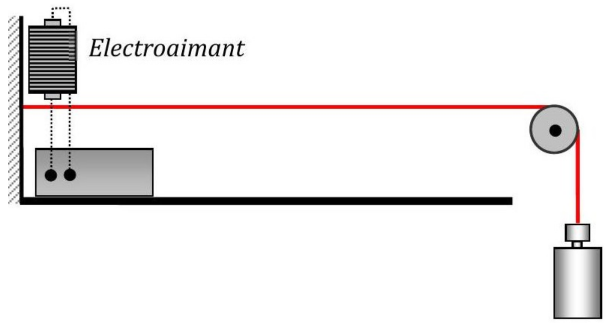
$$v_1(x,t) = 2Ar\cos k_1 x\cos\omega t$$

  - Le taux d'ondes stationnaires est infini : l'onde ne se propage plus.
  - Plus précisément, on observe en des points des nœuds de vibration pour : $k_1 x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, et en d'autres des ventres de vibration $k_1 x_n = n\pi$.
- On montre facilement que dans le cas où $|\underline{r}| = 1$, l'énergie de l'onde ne se propagent plus dans le domaine où $x < 0$. En effet, comme dans toute onde stationnaire, l'énergie fait alors «du sur place», cela se traduit ici par $\langle R_1\rangle = 0$. En ce qui concerne l'onde transmise, plus aucune énergie n'est transférée dans ce cas-là ($|\underline{r}| = 1 \Rightarrow T = 0$) :

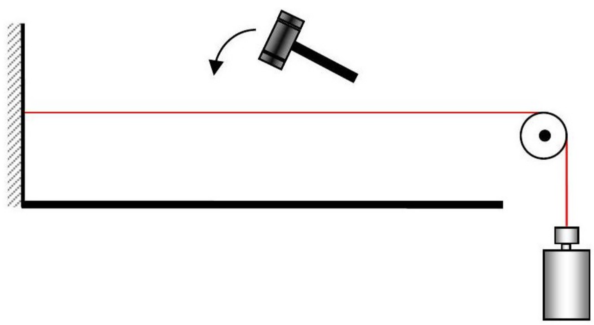
V. Corde de Melde

La corde de Melde est une corde fixée à ses deux extrémités (malgré le vibreur) :

✘ Oscillations forcées :



✘ Oscillations libres :



1. Modes propres

✘ Nous cherchons ainsi des solutions sous formes d'ondes stationnaires (modes propres) :

$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi') \text{ où } \omega = kc$$

✘ Ecrivons les deux conditions aux limites :

- ☛ en $x = 0$: $y(x = 0, t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos\varphi' = 0 \Rightarrow \cos\varphi' = 0$
- ☛ en $x = L$: $y(x = L, t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \varphi') = 0 \Rightarrow \cos(kL + \varphi') = 0$

✘ On a donc les deux conditions :

$$\cos\varphi' = 0$$

et :

$$\cos(kL + \varphi) = 0$$

✘ En prenant :

$$\varphi' = -\frac{\pi}{2}$$

, on obtient :

$$\sin(kL) = 0$$

D'où :

$$kL = n\pi$$

Sachant que : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on obtient :

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

✘ D'où la solution (mode propre n) :

$$y_n(x,t) = Y_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\cos\left(n\pi\frac{ct}{L} + \varphi_n\right)$$

2. Solution générale

a. Expression de $y(x,t)$

✘ La solution générale est obtenue par superposition des modes propres :

$$y(x,t) = \sum_n Y_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\cos\left(n\pi\frac{ct}{L} + \varphi_n\right)$$

✘ Dans le cas de l'acoustique, l'ensemble des $\{Y_n\}$ constitue le timbre responsable de la richesse du son (violon par exemple), le diapason ne fournissant que le fondamental, donc purement sinusoïdal.

✘ $y(x,t)$ s'écrit également :

$$y(x,t) = \sum_n \left(A_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{L}\right) + B_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{L}\right)\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$$

✘ Les conditions initiales permettent de déterminer les coefficients A_n et B_n.
En effet, on définit :

$$y(x,0) = \sum_n A_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) = f(x) = \text{ la déformée initiale}$$
$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x,t=0} = \sum_n B_n \frac{n\pi c}{L}\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) = g(x) = \text{ la vitesse initiale.}$$

b. Détermination des coefficients A_n et B_n

✘ On introduit les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{g}(x)$ transformées des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sur $\Re$ en fonctions impaires de période $2L$. Dans le cas d'une corde pincée (clavecin), on obtient par exemple[4] :

4. Les fonctions g et $\tilde{g}$ sont nulles

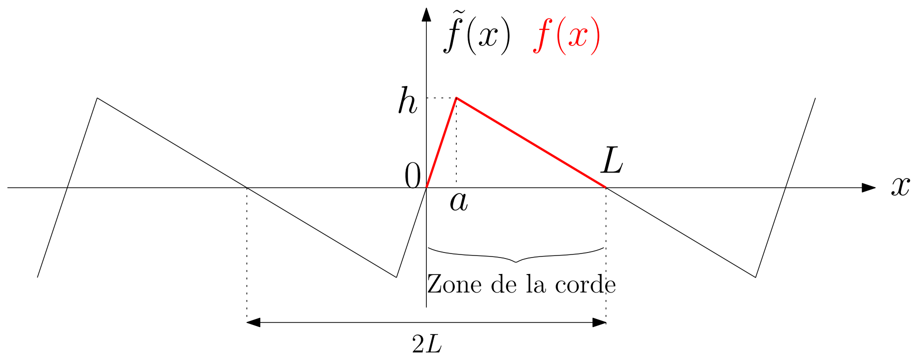


Figure 1 – Fonctions f et $\tilde{f}$

- Les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{g}(x)$, de période $2L$, se décomposent en série de Fourier :

$$\tilde{f}(x) = \sum_n a_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_n a_n \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right)$$
$$\tilde{g}(x) = \sum_n b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_n b_n \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right)$$

Dans le cas de la corde pincée, la décomposition en série de Fourier de $\tilde{f}(x)$ donne :

$$Y_{0n} = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 a(L-a)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

- Les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{g}(x)$ coïncidant avec les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, on a :

$$A_n = a_n$$
$$B_n = b_n \frac{L}{n\pi c}$$

VI. Résonance

1. Résultats expérimentaux

- Reprenons le dispositif correspondant aux oscillations forcées : l'électroaimant impose $y(0,t) = y_0 \cos(\omega t)$ et la masse m à l'autre extrémité impose une tension : $T_0 = Mg$.
- Pour une fréquence d'excitation f quelconque, on observe des ondes stationnaires de très faibles amplitudes. Pour certaines valeurs de la fréquence, on observe en revanche des amplitudes de vibrations importantes : on a résonance.
- Pour la plus petite fréquence de résonance f_0, on observe un seul fuseau (ventre de vibration au milieu). Les autres fréquences de résonance sont des multiples de f_0 et pour $f_n = n.\ f_0$, la corde présente n fuseaux.

2. Interprétation

- Afin d'interpréter ces résultats, cherchons des solutions sous formes d'ondes stationnaires de même pulsation que l'excitation :

$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(kx + \varphi'\right) \text{ où } \omega = kc$$

Et vérifiant les conditions aux limites :

- ☛ en $x = 0$: $y(x = 0, t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos\varphi' = y_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \phi = 0$ et $y_0 = A\cos\varphi'$
- ☛ en $x = L$: $y(x = L, t) = A\cos(\omega t+\varphi)\cos\left(kL + \varphi'\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(kL + \varphi'\right) = 0$
- ☛ L'égalité $\cos\left(kL + \varphi'\right) = 0$ entraîne : $kL + \varphi' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

$\Rightarrow \cos\left(kx + \varphi'\right) = \cos\left(k(x - L) + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin(k(L - x))$

$\Rightarrow y_0 = A\cos\varphi' = A\cos\left(-kL + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = A(-1)^n \sin(kL) \Rightarrow A = \frac{y_0(-1)^n}{\sin(kL)}$

$$y(x,t) = \underbrace{y_0 \frac{\sin(k(L - x))}{\sin(kL)}}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t)$$

✘ Ainsi, l'amplitude des vibrations est maximale lorsque $kL = n\pi$ donc lorsque $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ et $f_n = \left(\frac{c}{2L}\right) n$

$\Rightarrow$ Les pulsations de résonance sont les pulsations propres de la corde et la 1ère fréquence d'excitation est $f_0 = \frac{c}{2L}$

3. Application aux instruments de musique

✘ La corde, tendue entre deux points fixes, vibre en un nombre entier de fuseaux, donc sa longueur est égale à un multiple de la demi-longueur d'onde

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{c}{2f} = \frac{n}{2f}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

avec n = nombre de fuseaux

c = célérité le long de la corde

f = fréquence de la vibration

T_0 = tension de la corde

μ = masse linéaire de la corde

✘ Pour T_0, c et μ donnés, on obtient une onde stationnaire seulement pour les fréquences vérifiant la relation

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad \text{avec } n \text{ entier (formule des cordes vibrantes)}$$

✘ La valeur $n = 1$ correspond au son le plus grave que la corde puisse émettre : c'est le son fondamental. La corde vibre alors en un seul fuseau. Aux valeurs $n = 2, 3\ldots$ correspondent des sons plus aigus, appelés harmoniques.

✘ La formule des cordes vibrantes montre que :

- ✘ La fréquence du son fondamental augmente avec la tension de la corde, propriété utilisée pour accorder les instruments.
- ✘ Plus la masse linéaire est grande, plus la fréquence du son émis est faible, donc plus le son est grave, pour une tension et une longueur donnée
- ✘ plus la corde est courte, plus la fréquence est élevée, donc plus le son émis est aigu, pour une tension et une masse linéaire données
- ✘ Une corde pincée, grattée ou frappée vibre toujours simultanément selon plusieurs modes, et produit donc plusieurs notes. C'est cette superposition des notes qui donne à l'instrument son timbre particulier.
- ✘ Une corde vibrante ne peut pas ébranler une grande quantité d'air. Elle ne peut donc pas à elle seule produire un son d'une grande intensité. C'est pourquoi les instruments à cordes sont toujours soit reliés à des caisses de résonance (table d'harmonie), soit reliés à des amplificateurs électroniques.