

Fonction erreur

1 Résolution de l'équation de diffusion

On part de l'équation de diffusion 1D :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

On fait le changement de variable :

$$u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

Avec :

$$X(x, t) = f(u)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2t} \frac{x}{\sqrt{4Dt}} = \frac{-u}{2t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \end{aligned}$$

On calcule alors les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{du} \left(-\frac{1}{2t} \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{df}{du} \left(\frac{-u}{2t} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{du} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{du} \right) = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 f}{du^2} \end{aligned}$$

On injecte ces dérivées dans l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\ \frac{df}{du} \left(\frac{-u}{2t} \right) &= D \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 f}{du^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} = 0$$

Pour résoudre cette équation on fait le changement de variable :

$$g(u) = \frac{df}{du}$$

L'équation différentielle vérifiée par $g(u)$ est alors :

$$\frac{dg}{du} + 2ug(u) = 0$$

On résout cette équation par séparation des variables :

$$\frac{dg}{g} = -2u du$$

$$g(u) = A \exp(-u^2)$$

On en déduit :

$$f(u) = \int_0^u A \exp(-w^2) dw + B$$

Soit :

$$X(x, t) = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} A \exp(-w^2) dw + B$$

2 Fonction erreur

La fonction erreur est définie comme suit :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-w^2) dw$$

Les caractéristiques de cette fonction sont :

- ✕ $\operatorname{erf}(0) = 0$
- ✕ $\lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(u) = 1$
- ✕ erf est une fonction impaire

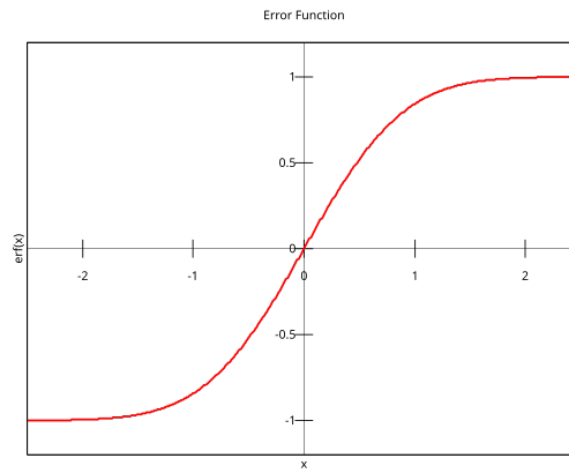


Figure 1 – Fonction erreur