

Pompe à chaleur

Solution proposée par JR Seigne MP,
avec la collaboration de M Libourel Sciences de l'Ingénieur MP*,
Clemenceau Nantes

1 Thermodynamique de la pompe à chaleur

1.1 Diagramme de Mollier

1. Dans les domaines où le fluide est monophasé liquide ou monophasé gaz, on peut, à pression constante, écrire que $dh = c_p dT$ avec $c_p > 0$. Par conséquent, T est croissante avec h . Par contre, la température n'est pas strictement croissante avec l'enthalpie car lors du changement d'état du corps pur, on a une évolution à la fois isobare et isotherme ce qui fait que la température reste identique alors que l'enthalpie augmente de h_{liq} à h_{gaz} .

2. La *chaleur latente massique de vaporisation* est appelée aujourd'hui enthalpie massique de vaporisation. On a $L^{vap} = h_{gaz} - h_{liq}$. Sur le graphique, on peut la trouver en faisant sur une horizontale (donc à température fixée) la différence entre les abscisses des points d'intersection de l'horizontale avec la ligne de vapeur saturée et de cette horizontale avec la ligne d'ébullition.

3. a) Si le liquide est supposé indilatable et incompressible, c'est donc que l'enthalpie est une constante sur une isotherme, l'allure de la courbe est donc une verticale.

b) Si on utilise le modèle du gaz parfait, on a $dh = c_p dT$ et donc h n'est à nouveau qu'une fonction de la température. L'allure de la courbe est donc à nouveau une verticale.

c) Dans la zone de changement d'état, l'isotherme est encore isobare. On a donc une allure horizontale.

4. Grâce à une identité thermodynamique, nous pouvons écrire que $dh = Tds + vdp$.

5. Sur une isentropique, on a donc $dh = vdp$. On utilise la loi des gaz parfaits en massique avec $r = R/M$ où M est la masse molaire du fluide : $pv = rT$ et donc $dh = rT \frac{dp}{p} = rT d(\ln p)$. On en déduit que $\frac{d \ln p}{dh} = \frac{1}{rT} > 0$. Les isentropiques sont donc bien de pente positive dans le diagramme de MOLLIER¹.

6. Sur une isenthalpique, on a $dh = 0 = Tds + vdp$. On en déduit que $ds = -r \frac{dp}{p}$. En intégrant, on arrive à $s = -r \ln p + \text{Cte}$ ce qui montre bien que l'entropie décroît lorsque la pression augmente.

7. On effectue la démonstration classique des fluides en écoulement permanent en grandeurs massiques. D'après le premier principe, on peut écrire que $u_B - u_A + \Delta e_c + \Delta e_{pot} = w_{tot} + q$. L'énoncé nous invite à négliger les variations d'énergie potentielle des forces extérieures ainsi que la variation d'énergie cinétique. Le travail se décompose en un travail lié à l'écoulement $w_{écoul}$ et un travail *utile* ou encore *technique* qui correspond à des transferts énergétiques mécaniques réalisés par des dispositifs mobiles comme des pales ou des pistons que le fluide va rencontrer dans son évolution de A vers B , ce travail est noté w par l'énoncé. Le travail lié à l'écoulement correspond aux forces de pression qui poussent le fluide à entrer en A et le freinent lors de la sortie en B . On a classiquement $w_{écoul} = \int_{v_A}^0 (-p_A) dv + \int_0^{v_B} (-p_B) dv$. On trouve

¹Le diagramme de MOLLIER ne figure pas au programme. On notera que l'on appelle plus couramment diagramme de MOLLIER le graphique portant $h = f(s)$ qui est encore le diagramme enthalpique. Le diagramme $\ln p = f(h)$ est plutôt qualifié de diagramme des frigoristes.

$w_{\text{écoul}} = p_A v_A - p_B v_B$. En utilisant les hypothèses de l'énoncé et ce calcul, on met en évidence le fait que : $h_B - h_A = w + q$ où w est le travail utile.

1.2 Cycle de la pompe à chaleur

8. La détente s'effectue dans un robinet de laminage sans pièce mobile et sans que le fluide ne puisse effectuer des transferts thermiques. On a donc $w_{34} = 0$ et $q_{34} = 0$. On en déduit que $\Delta h_{34} = 0$, la transformation est isenthalpique.

9. La représentation de la forme du cycle réalisé par le fluide dans la pompe à chaleur est effectué sur le schéma de la figure 1. La phase de compression isentropique 1 – 2 est réalisée dans le domaine vapeur sèche avec une courbe croissante sur le modèle de ce que le diagramme d'état du fluide R134A nous montre. Elle s'effectue entre les pressions p_1 et $p_2 > p_1$. Ensuite, on a une liquéfaction à pression constante (sur une horizontale 2 – 3 jusqu'à un point qui n'est pas défini, on peut s'arrêter sur le palier de changement d'état, aller à son extrémité ou bien finir dans la zone monophasé liquide. La transformation 3 – 4 isenthalpique représentée par une verticale doit nous ramener à la pression initiale p_1 , le fluide finit le cycle par une horizontale pour rejoindre le point 1.

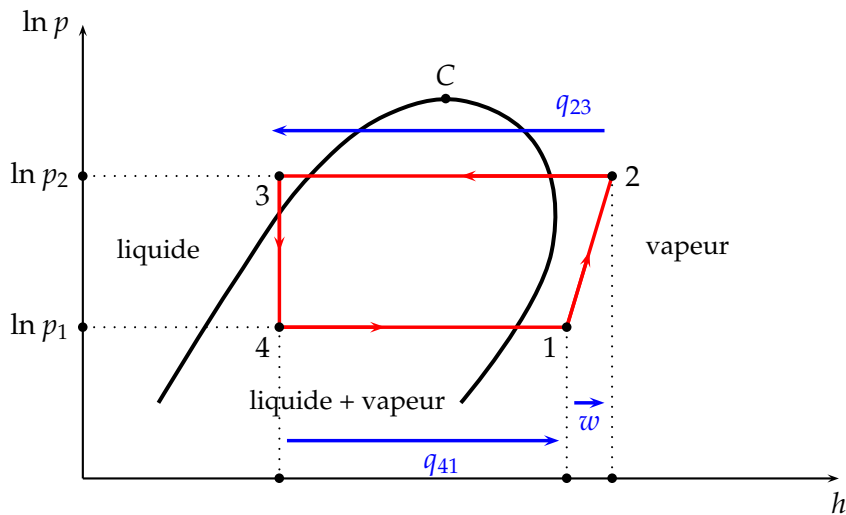


FIG. 1 – Cycle approximatif du fluide dans la pompe à chaleur

10. Sur le cycle complet on a $\Delta h = 0$. On effectue un bilan étape par étape. Pour 1 – 2, on a $\Delta h_{12} = w$. Pour 2 – 3, il n'y a pas de travail utile donc $\Delta h_{23} = q_{23}$. Ensuite, comme nous l'avons vu, on a $\Delta h_{34} = 0$. Enfin sur l'étape 4 – 1, il n'y a pas non plus de travail utile et par conséquent $\Delta h_{41} = q_{41}$. On en déduit que le bilan énergétique est : $w + q_{23} + q_{41} = 0$. On peut voir ces quantités représentées sur le schéma de la figure 1.

11. L'efficacité de la pompe à chaleur est le rapport (positif) du transfert énergétique utile sur le transfert énergétique coûteux. Une pompe à chaleur ayant pour objectif d'apporter de l'énergie à la source chaude, le transfert énergétique utile correspond donc à celui perdu par le fluide pendant l'étape 2 – 3, c'est-à-dire $|q_{23}| = -q_{23}$. Le transfert énergétique coûteux correspond au travail à fournir au compresseur dans l'étape 1 – 2 à savoir w . Il est donc logique de définir l'efficacité par $\eta = \frac{-q_{23}}{w}$. D'après le bilan énergétique sur le cycle, on a $-q_{23} = w + q_{41}$ et donc $\eta = 1 + \frac{q_{41}}{w}$. Or, $w > 0$ et $q_{41} > 0$, leur rapport est donc positif et $\eta > 1$.

12. D'après le document-réponse fourni, on observe que dans la partie monophasée liquide les isothermes ne sont pas tracées mais qu'au niveau de la ligne d'ébullition, on voit des débuts de courbes verticales. On peut donc conclure que le modèle adopté pour le liquide est satisfaisant. Pour la partie vapeur sèche, le modèle du gaz parfait n'est pas satisfaisant car on constate que les isothermes qui sont bien verticales pour une pression inférieure à 1 bar s'incurvent de façon très importante à partir de 10 bar. On retrouve bien le fait que le modèle du gaz parfait n'est satisfaisant que pour de faibles pressions et qu'ensuite, il faut changer d'équation d'état en utilisant par exemple l'équation de VAN DER WAALS.

13. La température $T_3 = 0\text{ °C}$ n'est pas acceptable². En effet, cela signifie que la température de la source chaude est au plus égale à cette valeur. Cela est incohérent avec le fait que la température de sortie de l'évaporateur soit $T_1 = 5\text{ °C}$, ce qui veut dire que la température de la source chaude est au minimum de 5 °C . On supposera donc que l'intention de l'énoncé était de donner la valeur $T_4 = 0\text{ °C}$ et, qu'à la sortie du condenseur, on se trouve juste à la fin de la liquéfaction du fluide, le point 3 se trouvant donc sur l'isobare $p_2 = 10\text{ bar}$ et sur la ligne d'ébullition à une température de 40 °C . Le tableau décrivant le cycle du fluide est donc donné ci-dessous.

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
$h\text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	402	424	256	256
p	3 bar	10 bar	10 bar	3 bar
T	5 °C	45 °C	40 °C	0 °C
État	monophasé gaz	monophasé gaz	liquide saturant	diphasé liquide-vapeur

14. Avec les valeurs précédentes, on en déduit que $w = \Delta h_{12} = 22\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et que $q_{23} = \Delta h_{23} = -168\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'efficacité est donc $\eta = 7,6$. Pour un cycle de CARNOT, on aurait le bilan énergétique suivant $w + q_c + q_f = 0$ alors que le second principe de la Thermodynamique impose pour une transformation cyclique et réversible que $\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} = 0$. Comme on a $\eta_c = \frac{-q_c}{w}$, on trouve facilement que $\eta = \frac{T_c}{T_c - T_f}$ où les températures sont en KELVIN. Compte tenu de la valeur de la température de sortie de l'évaporateur (40 °C), il est logique de prendre $T_c = 313\text{ K}$ et comme la température de sortie du condenseur est de 5 °C , on prend $T_f = 278\text{ K}$. On a donc $\eta_c = 8,9$. On retrouve bien le fait que la transformation réelle (irréversible) présente une efficacité plus faible que la transformation idéale de CARNOT.

15. La puissance disponible pour le chauffage est donnée par $P_{ch} = \mathcal{D}_m |q_{23}|$. Le débit massique de fluide à assurer est donc $\mathcal{D}_m = \frac{P_{ch}}{|q_{23}|} \simeq 0,025\text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.3 Cycle du compresseur

16. Le comportement du compresseur est supposé réversible. Dans la phase de compression, on a donc une adiabatique réversible. Le gaz modélisé par le gaz parfait suit donc la loi de LAPLACE $p v^\gamma = \text{Cte}$. La courbe de compression est donc de forme hyperbolique parcourue dans le sens d'augmentation de la pression. On peut constituer un cycle fictif comme il est représenté sur le schéma de la figure 2 en terminant par une évolution fictive à volume nul ramenant la pression à la valeur initiale.

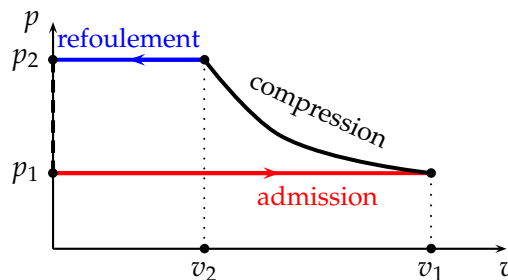


FIG. 2 – Transformation du fluide dans le compresseur

17. Le travail réversible est donné par $w_{cy} = \oint p dv$, il correspond à l'aire du cycle en valeur algébrique.

18. Sur la phase de compression, on a une adiabatique réversible. Cela permet d'écrire que $\Delta u = w_{comp} = c_v(T_2 - T_1)$. D'après la loi de MAYER des gaz parfaits, on a $c_p - c_v = r$. On en déduit que $c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$. En utilisant ensuite l'équation d'état des gaz parfaits $p v = r T$, on trouve que : $w_{comp} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{\gamma - 1}$. À ce travail, il faut ajouter celui d'admission et de refoulement qui correspond aux aires sous la courbe faciles à calculer. On a $w_{ad-ref} = p_2 v_2 - p_1 v_1$. Au total pour l'ensemble des phases du compresseur, on a $w_{tot} =$

²Il s'agit d'une manifeste erreur d'énoncé. Il existe des pompes à chaleur avec un sous-refroidissement qui peut amener le fluide dans l'état liquide à une relativement basse température mais, ici, dans le contexte décrit il n'en est nullement question.

$w_{comp} + w_{ad-ref} = \frac{\gamma(p_2 v_2 - p_1 v_1)}{\gamma - 1}$. Quel que soit le travail demandé par l'énoncé, c'est bien w_{comp} qui a de l'intérêt pour une machine fonctionnant en écoulement permanent.

19. On peut utiliser la loi de LAPLACE en variables intensives (T, p) pour écrire que $p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$. On trouve alors que la température au point 2 est donnée par $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$. L'application numérique³ donne $T_2 \simeq 43$ °C. Cette valeur est tout à fait satisfaisante si on la compare à la température de 45 °C obtenue graphiquement.

À propos d'Heinrich Olbers

I. LA COMÈTE 13P/OLBERS

I.A. Mouvements cométaires

1. La force subie par le point M est radiale car $\vec{F} = -m \overrightarrow{\text{grad}} U = -m \frac{dU}{dr} \vec{e}_r$. Le moment cinétique en O est $\vec{L}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$. Il est conservé d'après le théorème du moment cinétique en O car la force est colinéaire au vecteur position : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Par construction, le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ est orthogonal au vecteur $\vec{L}_O$, constant. On en déduit qu'au cours du temps, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ reste dans le plan passant par O et orthogonal à $\vec{L}_O$. Le mouvement est plan.

2. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Celle-ci est donnée par $E_p = mU$ car elle vérifie la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\overrightarrow{\text{grad}}(mU)$. Il vient : $E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + mU = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + mU$.

L'expression de la constante des aires $C = r^2 \dot{\phi}$ permet d'éliminer la dérivée en ϕ :

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + mU \text{ puis : } \boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + U(r)}.$$

3. La force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la masse m à la distance r est $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M_\odot m}{r^2} \vec{e}_r = -m \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\mathcal{G} M_\odot}{r} \right)$. On en déduit $\boxed{K = \mathcal{G} M_\odot}$.

4. Cours : mouvement borné donc $\varepsilon < 0$. Si l'on veut être plus précis et convaincant, il faut en faire la démonstration.

À partir des questions précédentes, on aboutit à $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r}$ où $K > 0$, ce

qui s'écrit encore :

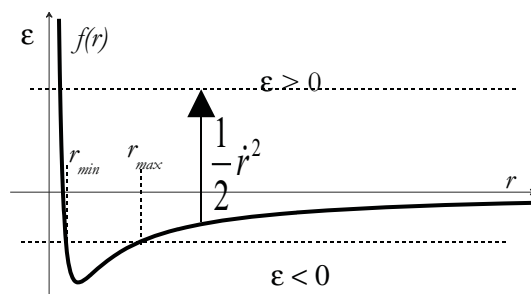
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{C^2}{2r^2} - \frac{K}{r} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + f(r). \text{ On peut}$$

raisonner graphiquement, en traçant

$$f(r) = \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} \text{ en fonction de } r :$$

Les valeurs possibles de r sont celles comprises dans l'intervalle où $f(r) < \varepsilon$. Cet intervalle est borné si $\varepsilon < 0$.

Il est aussi nécessaire que $\varepsilon > f_{\min} = -K^2/2C^2$.



5. Les valeurs extrémales de r , vérifiant $\dot{r} = 0$, sont solutions de l'équation $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r}$ que l'on peut réécrire sous la forme de l'équation du second degré $\varepsilon r^2 + K r - \frac{C^2}{2} = 0$.

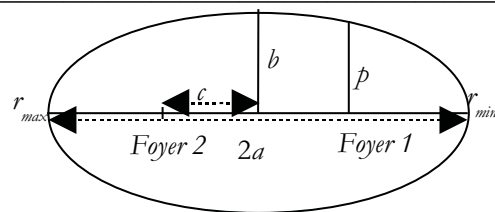
On en déduit $-\frac{K}{\varepsilon} = r_{\min} + r_{\max}$ et $-\frac{C^2}{2\varepsilon} = r_{\max} r_{\min}$

puis $\boxed{\varepsilon = \frac{-K}{r_{\min} + r_{\max}}}$ et $\boxed{C = \sqrt{\frac{2Kr_{\max}r_{\min}}{r_{\min} + r_{\max}}}}$

En fonction de p et a : $\boxed{\varepsilon = \frac{-K}{2a}}$ et $\boxed{C = \sqrt{Kp}}$.

6. Le mouvement borné est elliptique. a est le demi grand axe, p le paramètre et e l'excentricité.

On peut rappeler que $\boxed{p = a(1 - e^2)}$, qui servira à la question suivante.



7. Pour φ variant de 0 à π , le rayon est croissant donc $\boxed{\dot{r} > 0}$. On déduit de la relation

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r} \text{ l'expression } \dot{r} = \sqrt{2\varepsilon + \frac{2K}{r} - \frac{C^2}{r^2}}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{-\frac{K}{a} + \frac{2K}{r} - \frac{Kp}{r^2}} = \sqrt{\frac{K}{a} \frac{-r^2 + 2ar - pa}{r}} = \sqrt{\frac{K}{a} \frac{-r^2 + 2ar - a^2(1 - e^2)}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{K}{a} \frac{-(r - a)^2 + a^2e^2}{r}} \end{aligned}$$

puis, après séparation des variables : $\sqrt{\frac{a}{K}} \frac{r}{\sqrt{-(r - a)^2 + a^2e^2}} dr = dt$.

Il reste à intégrer de part et d'autre pour aboutir au résultat de l'énoncé :

$$\boxed{\int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \sqrt{\frac{a}{K}} \frac{r}{\sqrt{-(r - a)^2 + a^2e^2}} dr = \int_0^{\xi} d\tau = \tau}$$

8. Changeons de variable comme proposé : $r = a(1 - e \cos \xi) \Rightarrow dr = ae \sin \xi d\xi$ puis :

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_0^{\xi} \frac{a(1 - e \cos \xi)}{\sqrt{-a^2e^2 \cos^2 \xi + a^2e^2}} ae \sin \xi d\xi = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_0^{\xi} (1 - e \cos \xi) d\xi = a \sqrt{\frac{a}{K}} (\xi - e \sin \xi)$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{a^3}{K}} (\xi - e \sin \xi)}$$

Quand on atteint $r_{\max}$, $\tau = T/2$ et $\xi = \pi$ car $r_{\max} = a(1+e)$ d'où $\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \pi \Rightarrow \sqrt{\frac{a^3}{K}} = \frac{T}{2\pi}$.

On en déduit $\tau = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi)$. La relation $\sqrt{\frac{a^3}{K}} = \frac{T}{2\pi}$ est la troisième loi de Képler.

9. Le périhélie et l'excentricité permettent de calculer le demi grand axe :

$a = \frac{r_{\min}}{1-e}$ d'où $a = 16,9$ UA. La constante K est la même pour la Terre et la comète.

On en déduit la période de la comète : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_o^2}{a_o^3} \Rightarrow T = T_o \sqrt{\frac{a^3}{a_o^3}}$ d'où $T = 69,2$ années
 $= 69$ ans 77 jours.

La comète repassera au périhélie le 28 mars 2025 (un vendredi).

Calculons l'anomalie excentrique ξ pour $r = 26,06$ UA : $\cos \xi = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a} \right)$ d'où

$\xi = 2,198$ rad. On en déduit $\tau = 15,9$ ans = 15 ans 336 jours. La date du 10 janvier 1956 + 15,9 ans étant dans le passé, il faut considérer le **retour** de la comète.

Son passage à la distance r aura lieu le 28 mars 2025 – (15 ans 336 jours) soit le 26 avril 2009, ce qui est à peu de choses près la date de cette épreuve (22 avril) et qui explique la valeur choisie pour r .

I.B. La queue de la comète

10. Le vent solaire issu du Soleil exerçant sur la queue une force répulsive, le Soleil se trouve du côté S_1 .

11. Soient $\vec{V}_S$ la vitesse du vent solaire et $\vec{v}_{\text{Comète}}$ celle de la comète dans le référentiel R. Dans le référentiel lié à la comète, la vitesse du vent solaire est $\vec{V}_S - \vec{v}_{\text{Comète}}$, et oriente la queue. On en déduit que la comète se déplace de C_1 vers C_3 : $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$.

L'angle ϕ est donné par $\tan \phi = \frac{v_{\text{Comète}}}{V_S}$ soit $\phi = 4,3^\circ = 0,075$ rad.

