II : Incinération des déchets

II.A – Comportement du four en régime libre

15. Le bilan thermique est une forme particulière du premier principe $\mathrm{d}H = \delta Q + \delta W_u$ en l'absence de travail utile ; par ailleurs, pour un système condensé (les parois du four), $\mathrm{d}H = C_0 \mathrm{d}T_s$ tandis que $\delta Q = \mathcal{P}_f \mathrm{d}t$. Finalement, $\boxed{C_0 \dfrac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t} + G\left[T_s - T_{\text{ext}}\right] = 0}$ a pour solution $\boxed{T_s(t) = T_{\text{ext}} + \{T_s(0) - T_{\text{ext}}\} \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_\ell}\right)}$ avec $\boxed{\tau_\ell = \dfrac{C_0}{G}}$.

16. On peut par exemple rechercher l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote ; on trouve alors $t = \tau_\ell$ donc $\boxed{\tau_\ell = 4 \text{ h}}$.

17. $\boxed{G = \dfrac{C_0}{\tau} = 1,74 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}}$.

18. En régime permanent, le flux thermique à travers un isolant d'épaisseur constante est lui-même une constante en tout point de l'isolant : $j = -\frac{\mathcal{P}_f}{\Sigma}$ est, par ailleurs, lié à l'écart de température par la loi de Fourier, $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T$. À gradient constant, la température a donc une variation affine dans le milieu qui constitue l'isolant, et $j = \frac{T_s - T_{\text{ext}}}{e}$ donc $\boxed{\mathcal{P}_f = G[T_{\text{ext}} - T_s}$ avec $\boxed{G = \dfrac{\lambda \Sigma}{e}}$ soit numériquement $\boxed{G = 1,90 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}}$.

19. Le modèle proposé ici sous-estime manifestement les fuites thermiques, à travers les parties du four non isolées par des briques, ou par des phénomènes de type radiatif.

II.B – Thermodynamique d'un système ouvert

20. On adopte à nouveau le mode de raisonnement de la question **2** : le système fermé envisagé est constitué, à l'instant t, du système ouvert $\mathcal{S}$ et de toutes les masses $\sum D_i^e \delta t$ qui vont y entrer entre t et $t + \delta t$; à l'instant $t + \delta t$, on doit ajouter à $(\mathcal{S})$ les masses $\sum D_i^s \delta t$ qui sont sorties du système pendant le même temps. Le premier principe $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W_u + \delta W_p$ appliqué à ce système impose le calcul :

– de la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U = \delta t\left[\frac{\mathrm{d}U_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} + \sum_i D_i^s u_i^s - \sum_i D_i^e u_i^e\right]$, en fonction des énergies internes massiques u_i^s et u_i^e ;
– du transfert thermique reçu, $\delta Q = \mathcal{P}_{\text{th}}\delta t$;
– du travail « utile » reçu, $\delta W_u = \mathcal{P}'\delta t$;
– du travail des forces de pression reçues par le système, moteur sur les zones d'entrée et résistant sur les zones de sortie, $\delta W_p = \sum_i P_i^s \delta V_i^s - \sum_i P_i^e \delta V_i^e$.

Il suffit alors de remarquer que $D_i^s \delta t = \rho_i^s \delta V_i^s$ et $h_i^s = u_i^s + P_i^s/\rho_i^s$ où ρ_i^s est la masse volumique de l'espèce i sortant du système pour recopier ce premier principe sous la forme $\boxed{\frac{\mathrm{d}U_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} D_i^s h_i^s - \sum_{i=1}^{n} D_i^e h_i^e + \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}'}$.

21. Le seul paramètre thermodynamique est la température du four donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}U_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t} = C_0 \frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t}}$.

22. Sans changement, $\boxed{\mathcal{P}_{\text{th}} = G\left[T_{\text{ext}} - T_s(t)\right] + \mathcal{P}_{\text{ch}} - \mathcal{P}_{\text{ref}}}$.

23. En régime permanent et du fait de l'absence de matière, tous les débits entrants sont égaux aux débits sortants, $D_i^e = D_i^s$; en particulier, $D_{\text{air}}^e = D_{\text{air}}^s = D_{\text{air}}$; par ailleurs, pour un gaz parfait, $\mathrm{d}h = c\mathrm{d}T$ donc $h_{\text{air}}^e - h_{\text{air}}^s = c_{\text{air}}(T_{\text{ext}} - T_s(t))$ donc $\boxed{D_{\text{air}}^e h_{\text{air}}^e - D_{\text{air}}^s h_{\text{air}}^s = D_{\text{air}} c_{\text{air}}\left[T_{\text{ext}} - T_s(t)\right]}$.

24. De la même manière, on intègre $\mathrm{d}h = c\mathrm{d}T$ de part et d'autre de la température de réaction pour trouver $\boxed{h_e - h_s = c^e(T_{\text{ext}} - T_0) + q + c^s(T_0 - T_s(t))}$. On en déduit, en régime permanent et si $c^e \simeq c^s$, l'expression $\boxed{D^e h^e - D^s h^s = D\left[c(T_{\text{ext}} - T_s(t)) + q\right]}$.

25. On regroupe les résultats précédents, en l'absence de tout travail utile, pour recopier le bilan thermique sous la forme $C_0 \frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t} = G[T_{\text{ext}} - T_s(t)] + D_{\text{air}} c_{\text{air}}\left[T_{\text{ext}} - T_s(t)\right] + D\left[c(T_{\text{ext}} - T_s(t)) + q\right] + \mathcal{P}_{\text{ch}} - \mathcal{P}_{\text{ref}}$ qu'on peut aussi écrire $\boxed{C_0 \frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t} + (G + Dc + D_{\text{air}} c_{\text{air}})\, T_s(t) = (G + Dc + D_{\text{air}} c_{\text{air}})\, T_{\text{ext}} + Dq + \mathcal{P}_{\text{ch}} - \mathcal{P}_{\text{ref}}}$.

II.C – Essai du four en charge

26. En régime permanent, $\boxed{T_\infty = T_{\text{ext}} + \frac{Dq}{G + Dc + D_{\text{air}} c_{\text{air}}}}$ ou, numériquement, $\boxed{T_\infty = 540\ ^\circ\text{C}}$. On peut aussi recopier cette équation différentielle sous la forme $\tau_\infty \frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t} + T_s = T_\infty$ avec $\boxed{\tau_\infty = \frac{C_0}{G + Dc + D_{\text{air}} c_{\text{air}}}}$ soit, numériquement $\boxed{\tau = 6{,}36 \cdot 10^2\ \text{s ou } 10{,}6\ \text{mn}}$.

27. Le développement de $T_s(t) = T_\infty + \theta(t)$ et $D(t) = D_m + \delta(t)$ dans l'équation-bilan thermodynamique ci-dessus amène à écrire $C_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + (G + D_m c + D_{\text{air}} c_{\text{air}})\, \theta(t) + c\delta(t)\left[T_\infty + \theta(t)\right] = c\delta(t) T_{\text{ext}} + \delta(t) q$ qui s'écrit effectivement $\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta}{\tau_\infty} = \left[\frac{c(T_{\text{ext}} - T_\infty) + q}{C_0}\right]\delta(t) - \underbrace{\frac{c}{C_0}\theta(t)\delta(t)}_{\text{négligé}}}$ avec donc $\boxed{\tau'_\infty = \tau_\infty}$.

28. En notations complexes, on peut chercher une solution de cette équation en régime harmonique forcé sous la forme $\underline{\theta} = \frac{c(T_{\text{ext}} - T_\infty) + q}{C_0} \frac{\underline{\delta}}{\frac{1}{\tau_\infty} + \imath\omega}$ où $\tau_\infty \sim 10\ \text{mn} \gg \frac{2\pi}{\omega} \simeq 1\ \text{s}$; on peut donc, dans l'équation ci-dessus (qui est effectivement un filtre passe-bas du premier ordre de coupure $\omega_c = 1/\tau_\infty$) considérer que $\omega \gg \omega_c$ et donc négliger l'amplitude $\underline{\theta}$ des oscillations de la température : $\boxed{T_s(t) \simeq T_\infty}$.

29. Il suffit de remplacer q par q', $\boxed{T'_\infty = T_{\text{ext}} + \frac{Dq'}{G + Dc + D_{\text{air}} c_{\text{air}}} = 587\ ^\circ\text{C}}$.

30. On a $\boxed{\Delta h_{\text{eau}} = c_{\text{eau}}(T^\star - T_{\text{ext}}) + \Lambda + c_{\text{vap}}(T_{\max} - T^\star)}$ où $T^\star = 100\ ^\circ\text{C}$ est la température de changement d'état ; numériquement $\boxed{\Delta h_{\text{eau}} = 4{,}42 \cdot 10^6\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}}$; l'échange thermique entre l'intérieur du four et l'eau étant supposé total (pas de pertes thermiques), $\boxed{\mathcal{P}_{\text{ref}} = D_{\text{eau}} \Delta h_{\text{eau}} = 2{,}21 \cdot 10^6\ \text{W}}$.

31. Supposant *a priori* le refroidissement suffisamment rapide (au regard de τ_∞), on peut négliger tous les transferts thermiques sauf ceux associés au refroidissement par l'eau pendant cette phase ; de l'équation $C_0 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \simeq -\mathcal{P}_{\text{ref}}$ qui en découle on déduit la durée de refroidissement $\boxed{\Delta t = C_0 \frac{T_{\max} - T_{\min}}{\mathcal{P}_{\text{ref}}} = 56{,}8\ \text{s}}$; on constate que $\Delta t \ll \tau_\infty$, ce qui valide l'hypothèse faite ici.

Proposé par paul.roux@fauriel.org