

Quelques aspects du fonctionnement du laser

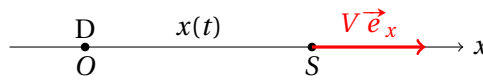
Concours X-Cachan PSI (Physique)

10 Mai 2010

I Profil spectral et cohérence temporelle

I.1°) Élargissement des raies spectrales par effet Doppler

I.1°).a Effet Doppler



1. La célérité de l'onde émise étant c dans le milieu étudié, les dates d'arrivées des signaux émis par la source en S sont respectivement, compte tenu de la durée de la propagation :

$$t' = t + \frac{x(t)}{c} \quad (1)$$

$$t' + T' = t + T + \frac{x(t+T)}{c}. \quad (2)$$

2. Si le temps caractéristique de variation de la vitesse V est grand devant T , la vitesse peut être considérée comme uniforme pendant la durée T et par conséquent on peut poser que $x(t+T) = x(t) + V \cdot T$, il vient alors en faisant la différence membre à membre (2)-(1) :

$$T' = T + \frac{x(t+T) - x(t)}{c} = T \left(1 + \frac{V}{c} \right). \quad (3)$$

La fréquence est l'inverse de la période, il vient donc lorsque $V \ll c$:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{V}{c} \right)^{-1} \approx \nu \left(1 - \frac{V}{c} \right). \quad (4)$$

3. **Redshift** La lumière est émise par une étoile arrive sur terre avec une fréquence plus faible que sa fréquence d'émission (donc si la lumière était initialement bleue, il y aura bien décalage vers le rouge, associé à une fréquence plus faible et une longueur d'onde plus grande). Nous en déduisons que les étoiles observées s'éloignent de la terre.

I.1°).b Profil spectral d'une raie émise par une vapeur atomique

4. Nous admettons que la lumière reçue sur le détecteur est proportionnelle à la population des atomes ayant une vitesse V_x . La longueur d'onde λ de la lumière reçue sur le détecteur est

$$\lambda = cT' = (c + V_x) T = \lambda_0 \left(1 + \frac{V_x}{c} \right).$$

par conséquent $V_x = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$ et $dV_x = c \frac{d\lambda}{\lambda_0}$. On obtient donc en reportant le tout dans la distribution des vitesses de Maxwell :

$$dN = \frac{Nc}{\lambda_0} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \exp\left[-\frac{Mc^2}{2RT} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\right)^2\right] d\lambda = \alpha d\lambda.$$

Nous en déduisons que :

$$g(\lambda) = K \exp\left[-\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda}\right)^2\right] \quad (5)$$

où la constante K ne dépend pas de λ et avec :

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{2RT}{Mc^2}}. \quad (6)$$

5. Représentation graphique :

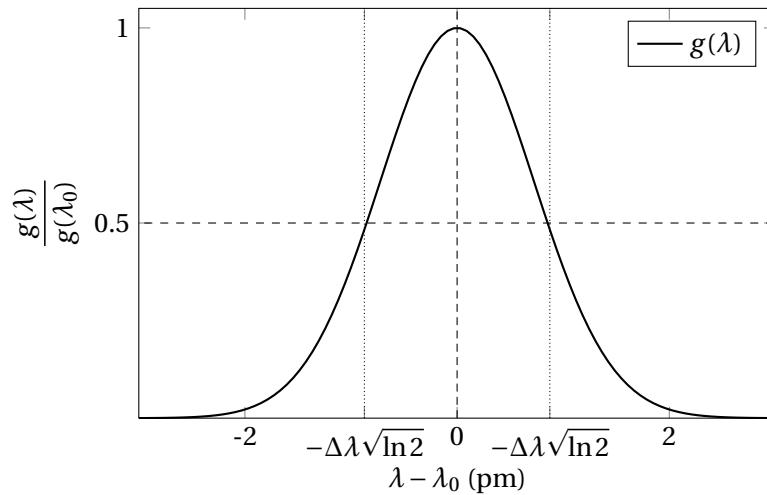


FIGURE 1 – Profil spectral à 300 K

Pour la raie rouge du néon (utilisée dans le laser He – Ne).

Température	$\Delta\lambda$
$T_1 = 300\text{ K}$	$1.05 \times 10^{-3}\text{ nm}$
$T_2 = 2000\text{ K}$	$2.71 \times 10^{-3}\text{ nm}$

La largeur à mi-hauteur est obtenue quand l'argument de l'exponentielle vaut $-\ln 2$ soit pour $\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda \sqrt{\ln 2}$.

À $T_1 = 300\text{ K}$, il vient $\lambda - \lambda_0 = 0.874 \times 10^{-3}\text{ nm}$. Ces valeurs sont utilisées dans le tracé de la figure (3).

L'expression raie spectrale est justifiée par le fait que la largeur à mi-hauteur de la gaussienne raie est très inférieure à la longueur d'onde moyenne et que la lumière n'est donc émise de manière notable que dans un domaine de largeur quelques $\Delta\lambda$.

6. Étude fréquentielle Comme $\lambda = \frac{c}{\nu}$, il vient par différentiation $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$. Nous pouvons donc effectuer le changement de variable :

$$g(\lambda).d\lambda = g\left(\frac{c}{\nu}\right) \times -\frac{c}{\nu^2} d\nu.$$

Et par identification, en posant que $g(\lambda)d\lambda = -f(\nu)d\nu$ ¹, il vient :

$$f(\nu) = \frac{Kc}{\nu^2} \exp \left[-\frac{c^2}{(\nu\nu_0\Delta\lambda)^2} (\nu - \nu_0)^2 \right].$$

Par conséquent, en introduisant les constantes :

$$K' = \frac{c}{\nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}, \quad \Delta\nu = \frac{\nu_0\nu\Delta\lambda}{c},$$

nous obtenons la formulation recherchée :

$$f(\nu) = K' \exp \left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Comme la raie est très étroite, ν diffère très peu de ν_0 et on peut donc écrire avec une excellente précision (mieux que 10^{-5} près) :

$$K' = \frac{c}{\nu_0^2}, \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}, \quad \Delta\nu = \frac{\nu_0^2\Delta\lambda}{c}, \quad (8)$$

Pour la raie rouge du néon (utilisée dans le laser He – Ne), il vient $\nu_0 = 4.74 \times 10^{14}$ Hz.

Température	$\Delta\nu$
$T_1 = 300$ K	785 MHz
$T_2 = 2000$ K	2.03 GHz

Remarque : On peut proposer une autre expression pour $\Delta\nu$ permettant de ne pas reprendre de valeurs numériques intermédiaires, ce qui évite des erreurs d'arrondi en remarquant que :

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0^2\Delta\lambda}{c} = \frac{\nu_0^2}{c^2} \lambda_0 \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

I.2°) Mesure expérimentale de la largeur d'une raie spectrale

I.2°).a Interféromètre de Michelson

7. Question de cours.
8. Question de cours
9. TP Autocollimation

10. Comportement général d'un interféromètre à deux ondes parfaitement cohérente. Si A est l'intensité lumineuse que chacune des sources crée au niveau du détecteur, on a de manière générale si les deux voies sont correctement équilibrées.

$$I(\Delta\Phi) = 2A(1 + \cos \Delta\Phi)$$

où $\Delta\Phi$ est le déphasage entre les deux ondes superposées au niveau du détecteur.

Ici, l'intensité lumineuse totale pénétrant dans l'interféromètre est I_0 qui se répartit équitablement entre les deux voies, et est ensuite collectée par la lentille L_2 qui concentre toute la lumière transmise sur le détecteur par conséquent $A = \frac{I_0}{2}$.

1. Le signe « moins » a été oublié dans l'énoncé.

En introduisant la différence de marche δ entre les deux voies, le déphasage $\Delta\Phi$ peut être mis sous la forme :

$$\Delta\Phi = 2\pi\sigma\delta = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\pi\frac{\delta}{c}v.$$

Dans l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, la différence de marche δ est le double de l'épaisseur de la lame d'air $\delta = 2x$. Par conséquent :

$$\Delta\Phi = 4\pi\sigma x = 4\pi\frac{x}{\lambda} = 4\pi\frac{x}{c}v \quad (9)$$

I.2°.b Tracé de l'interférogramme et mesure des largeurs de raies spectrales.

11. Il nous suffit de ne considérer que l'intensité lumineuse des ondes émises dans un intervalle de fréquence élémentaire $d\nu$, il vient

$$dI = f(\nu) \cdot \left[1 + \cos\left(4\pi\frac{x}{c}\nu\right) \right] d\nu. \quad (10)$$

12. La forme de la fonction $f(\nu)$ a été obtenue :

$$f(\nu) = K' \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2\right].$$

Pour faire apparaître les intégrales répertoriées dans le formulaire fourni, nous posons :

$$z = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}, \quad (11)$$

dont nous tirons immédiatement : $\nu = \nu_0 + z\Delta\nu$ et $d\nu = \Delta\nu dz$. En substituant ceci dans l'expression de dI puis en intégrant sur l'ensemble des fréquences permises, il vient :

$$I = K' \Delta\nu \int_0^\infty \exp(-z^2) \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{c}[\nu_0 + z\Delta\nu]\right) \right] dz. \quad (12)$$

Nous remarquons alors, selon la suggestion de l'énoncé que la fonction $f(\nu)$ prend des valeurs extrêmement faibles pour $\nu < 0$ et que le cosinus peut être développé en somme de deux termes. Compte tenu de la linéarité de l'intégration et en posant $\alpha = \frac{4\pi x \Delta\nu}{c}$, nous sommes ramenés au calcul de :

$$I = K' \Delta\nu \left\{ \int_{-\infty}^\infty \exp(-z^2) dz + \cos\left(4\pi\nu_0\frac{x}{c}\right) \int_{-\infty}^\infty \exp(-z^2) \cos(\alpha z) dz \right. \\ \left. + \sin\left(4\pi\nu_0\frac{x}{c}\right) \int_{-\infty}^\infty \exp(-z^2) \sin(\alpha z) dz \right\}$$

en utilisant le formulaire fourni par l'énoncé, ce résultat se ramène à :

$$I = K' \sqrt{\pi} \Delta\nu \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{4\pi^2 x^2 \Delta\nu^2}{c^2}\right) \cos\left(4\pi\nu_0\frac{x}{c}\right) \right\} \quad (13)$$

Introduisons alors les variables réduites :

$$\Delta\Phi = 4\pi\nu_0\frac{x}{c}, \quad 2A_0 = K' \sqrt{\pi} \Delta\nu, \quad \text{et } L_c = \frac{c}{\pi \Delta\nu} \quad (14)$$

Pour mettre le résultat sous la forme pertinente pour l'expérience effectuée :

$$I = 2A_0 \left\{ 1 + \exp\left[-\left(\frac{2x}{L_c}\right)^2\right] \cos(\Delta\Phi) \right\}. \quad (15)$$

13. Paramètres de l'enregistrement :

La translation du miroir et le déplacement du papier démarrant tous deux à la date $t = 0$, il vient : $x = V_0 t$ et $X = V_1 t$, d'où la relation $x = \frac{V_0}{V_1} X$.

En reportant cette relation dans l'équation (15), et en remarquant que le déplacement Y est proportionnel à I nous obtenons :

$$Y(X) = Y_0 \left\{ 1 + \exp \left[- \left(\frac{2x V_0}{L_c V_1} \right)^2 \right] \cos \left(4\pi v_0 \frac{x V_0}{c V_1} \right) \right\}.$$

Que nous pouvons mettre sous la forme :

$$Y(X) = Y_0 \left\{ 1 + \exp \left[- \left(\frac{X}{\Delta X} \right)^2 \right] \cos \left(2\pi \frac{X}{X_0} \right) \right\}, \quad (16)$$

en posant :

$$X_0 = \frac{V_1}{2V_0} \frac{c}{v_0} = \lambda_0 \frac{V_1}{2V_0} \quad (17)$$

et

$$\Delta X = \frac{V_1}{2V_0} L_c = \frac{1}{2\pi} \frac{V_1}{V_0} \frac{c}{\Delta v}. \quad (18)$$

14. Exploitation expérimentale :

Sur les tracés (1) et (2), la vitesse de défilement du papier est la même et est faible, les enveloppes des oscillations sinusoïdales sont respectivement $Y_M(X) = Y_0(1 + \mathcal{C}(X))$ et $Y_m(X) = Y_0(1 - \mathcal{C}(X))$ où $\mathcal{C}(X)$ désigne le facteur de contraste, fonction de X variant lentement à l'échelle de X_0 qui est la pseudopériode spatiale des oscillations enregistrées (comme sur la figure 3). Ce qui nous restitue la définition usuelle :

$$\mathcal{C}(X) = \frac{Y_M(X) - Y_m(X)}{Y_M(X) + Y_m(X)} = \frac{Y_M(X) - Y_m(X)}{2Y_0}$$

avec ici théoriquement :

$$\mathcal{C}(X) = \exp \left[- \left(\frac{X}{\Delta X} \right)^2 \right].$$

Pour X , le contraste décroît d'autant plus rapidement en fonction de X que ΔX est faible, donc que Δv est grand (cf équation 18). Nous en concluons que Δv est le plus grand pour le tracé 2. Comme Δv augmente avec la température : *Le tracé 1 est celui effectué à 300K.*

Pour obtenir L_c plusieurs méthodes sont utilisables, à partir du relevé de la fonction $\mathcal{C}(X)$, citons en deux :

1. On recherche la valeur de X pour laquelle le contraste vaut 0.5 en se basant sur le tracé de courbe déjà effectué figure (3) on sait que $X_{0.5} = \Delta X \sqrt{\ln 2}$.
2. On remarque que :

$$\sqrt{-\ln \left(\frac{Y_M(X) - Y_m(X)}{2Y_0} \right)} = \frac{X}{\Delta X}.$$

Ce résultat peut alors être exploité par régression linéaire en relevant plusieurs points sur la courbe (c'est la meilleure méthode car elle permet de confronter le facteur ce contraste relevé à sa valeur théorique).

Compte tenu du temps imparti en concours nous utilisons la première méthode, en remarquant que $2 \frac{V_0}{V_1} = 0.12$ dans cette expérience

	T	$X_{0.5}$	ΔX	L_c	Δv
Tracé 1	300K	87.5 cm	105 cm	0.126 m	758 MHz
Tracé 2	2000K	33 cm	40.0 cm	0.048 m	1.99 GHz

Ces valeurs sont très proches de celles qui ont été calculées question 6..

15. Mesure de longueur d'onde :

Le tracé 3 nous permet d'accéder à la longueur d'onde car nous observons maintenant les oscillations sinusoïdales de l'intensité lumineuse en fonction de la translation du miroir de l'interféromètre. Nous observons $n = 19$ périodes pour un défilement X_p de papier de 10 cm par conséquent $X_0 = \frac{X_p}{n}$ et comme $X_0 = \lambda_0 \frac{V_1}{2V_0}$ nous obtenons ici $\lambda_0 = \frac{2V_0}{V_1} \frac{X_p}{n} = 632 \text{ nm}$. Cette valeur est très précise en dépit du faible nombre de franges enregistrées.

La fréquence correspondante est $\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = 4.75 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

L'expérience est menée avec une lampe fonctionnant à 2000 K, température pour laquelle nous connaissons la valeur de $\Delta X = 40.0 \text{ cm}$.

Sur la figure, nous notons un contraste $\mathcal{C}(X) = 0,83$ et compte tenu de la question précédente, deux mesures concordantes peuvent être effectuées. Par le calcul il vient $X_0 = \Delta X \sqrt{-\ln(\mathcal{C}(X))} = 13 \text{ cm}$, valeur que nous retrouvons en cherchant pour quelle valeur de X $\mathcal{C}(X) = 0,83$.

Tenons alors compte du facteur d'échelle entre position sur le papier et position du miroir utilisé pour construire le Tracé 2, il vient : $x_0 = \frac{V_0}{V_1} X_0 = 1.56 \text{ cm}$.

I.3°) Largeur spectrale d'un laser : principe de la cavité résonnante

I.3°).a Cavité résonnante

16. Calcul du déphasage :

Nous représentons seulement deux rayons émergents successifs : Le déphasage entre deux rayons

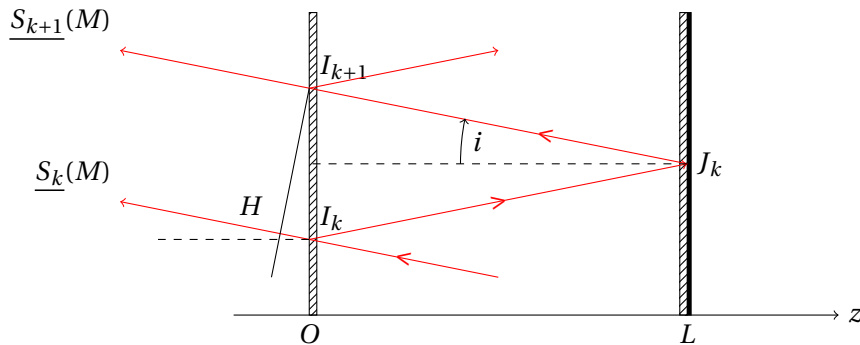


FIGURE 2 – Chemins parcourus par la lumière

successifs (interférant ensuite à l'infini) résulte uniquement des phénomènes de propagation compte tenu des hypothèses faites dans l'énoncé. D'après le théorème de Malus et Dupin², la différence de marche à prendre en compte se ramène à $\delta = (I_k J_k I_{k+1}) - (I_k H)$.

En fonction des chemins géométriques, il vient :

$$\delta = I_k J_k + J_k I_{k+1} - I_k H = 2I_k J_k - IH = \frac{2L}{\cos i} - I_k I_{k+1} \sin i$$

et comme $I_k I_{k+1} = 2L \tan i$, il vient :

$$\delta = \frac{2L}{\cos i} - 2L \tan i \sin i = 2L \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i} = 2L \cos i,$$

2. Ou plus exactement sa réciproque qui nous permet d'affirmer que depuis une source située à l'infini les rayons lumineux suivant le parcours inverse de celui envisagé ici sont perpendiculaires à la surface d'onde dont la trace dans le plan de la figure est $(I_k H)$.

d'où le déphasage :

$$\Delta\Phi = 2\pi\sigma\delta = 4\pi\frac{v}{c}L\cos i \quad (19)$$

17. Amplitudes des rayons successifs :

Nous remarquons qu'entre deux rayons successifs, les amplitudes ne diffèrent que par l'existence d'une réflexion supplémentaire sur le miroir partiellement réfléchissant, par conséquent $\frac{S_{k+1}}{S_k} = r$.

Le rapport des amplitudes complexes est donc :

$$\frac{S_{k+1}}{S_k} = r \exp(-j\Delta\phi).$$

Compte tenu de la valeur s_0 de l'amplitude du premier rayon, il vient immédiatement :

$$\underline{S}_k(M) = [r \exp(-j\Delta\phi)]^k.$$

18. Amplitude résultante :

La somme des diverses amplitudes se ramène à l'étude d'une suite géométrique de raison $r = \exp(-j\Delta\phi)$ et de premier terme s_0 . Comme $r < 1$, la série associée est convergente et de somme :

$$\underline{S}(M) = s_0 \frac{1}{1 - r \exp(-j\Delta\phi)}.$$

L'intensité correspondante est obtenue en multipliant par la valeur complexe conjuguée, il vient :

$$I = s_0^2 \frac{1}{1 - r \exp(-j\Delta\phi)} \cdot s_0 \frac{1}{1 - r \exp(j\Delta\phi)}$$

soit, en développant le dénominateur :

$$I = s_0^2 \frac{1}{1 + r^2 - r \exp(-j\Delta\phi) - r \exp(j\Delta\phi)} = \frac{s_0^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\Delta\phi)}.$$

Compte tenu de la relation trigonométrique :

$$\cos(\Delta\phi) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right),$$

il vient :

$$I = \frac{s_0^2}{1 + r^2 - 2r + 4r \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}.$$

Nous posons alors :

$$I_0 = \frac{s_0^2}{(1-r)^2}, \quad (20)$$

et

$$m = \frac{4r}{(1-r)^2} \quad (21)$$

pour obtenir la formulation réduite :

$$I = \frac{I_0}{1 + m \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (22)$$

19. Application numérique :

Pour $r = 0,9$, il vient $m = 360$.

Le maximum est obtenu chaque fois que $\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 0$ soit pour $\Delta\phi = 2p\pi$ où p est un entier arbitraire non nul ($p \in \mathbb{N}^*$). Il ne faut pas prendre p entier relatif car la cavité est réelle, les deux miroirs ne peuvent pas se traverser !

La valeur de ces maxima est I_0 .

Il est plus simple d'étudier la fonction $I(\Delta\phi)$ sur \mathbb{R} et de se restreindre ensuite aux valeurs positive de $\Delta\phi$.

La fonction étudiée est paire et 2π -périodique, il nous suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour connaître son comportement. Compte tenu de sa parité nous pouvons encore restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ sur lequel la fonction $I(\Delta\phi)$ est à l'évidence décroissante de I_0 à $\frac{I_0}{1+m}$.

La largeur à mi hauteur est alors obtenue pour $\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$ ce qui nous permet la résolution approchée :

$$\Delta\phi = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{m}}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{1-r}{\sqrt{r}} \approx 0.106 \text{ rad} \quad (23)$$

La largeur à mi-hauteur du pic correspondant est donc le double $\Delta_{\frac{1}{2}}\Delta\phi \approx \frac{4}{\sqrt{m}}$.

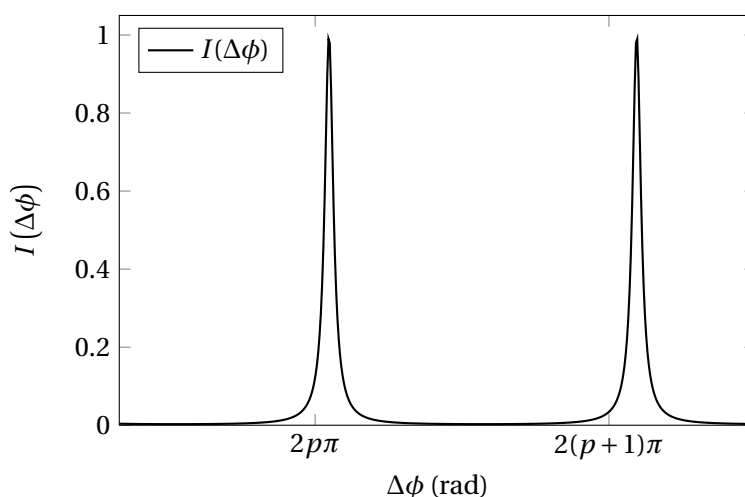


FIGURE 3 – Allure de la courbe $I(\Delta\phi)$

Les pics sont très étroits, par conséquent l'intensité en M ne peut être considérée comme non nulle que pour des valeurs de $\Delta\phi$ très proches de $2p\pi$.

I.3°.b Nombre de modes et cohérence temporelle :

20. Les fréquences correspondant au maximum de $I(\Delta\phi)$ sont telles que :

$$\Delta\phi = 2p\pi = 4\pi \frac{\nu}{c} L,$$

ce qui impose les fréquences de modes :

$$\nu_p = p \frac{c}{2L} = p\delta\nu \quad (24)$$

L'intervalle spectral libre $\delta\nu$ vaut donc pour une cavité de longueur $L = 30 \text{ cm}$, $\delta\nu = 500 \text{ MHz}$.

21. Dénombrement des modes longitudinaux :

Nous avons établi que la largeur spectrale $\Delta\nu$ de la raie est $\Delta\nu = 785 \text{ MHz}$ à $T_1 = 300 \text{ K}$, par conséquent $\frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = 0,64$. Il y a au plus deux modes de la cavité dans le profil de la raie spectrale.

À $T_1 = 200 \text{ K}$, il vient $\frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = 0,24$ quatre modes de la cavité peuvent être contenus dans le profil spectral.

Il ne pourra y avoir qu'un mode si l'intervalle spectral libre est supérieur à la largeur de raie, c'est à dire si $\delta\nu > \Delta\nu$ soit ici $\frac{c}{2L} > \Delta\nu$ et donc pour $L < \frac{c}{2\Delta\nu}$. Il vient donc numériquement à 2000 K $L \leq L_m = 7,4 \text{ cm}$.

22. Largeur spectrale de mode :

Nous avons montré que la largeur à mi hauteur des pics en représentation $I(\Delta\phi)$ est $\Delta_{\frac{1}{2}}\Delta\phi \approx \frac{4}{\sqrt{m}}$.

Comme $\Delta\Phi = 2\pi\sigma\delta = 4\pi\frac{\nu}{c}L$, il vient immédiatement : $\Delta_{\frac{1}{2}}\Phi = 4\pi\frac{\Delta\nu_c}{c}L$ d'où :

$$\Delta\nu_c = \frac{c}{4\pi L} \Delta_{\frac{1}{2}}\Delta\phi = \frac{c}{\pi L\sqrt{m}} \quad (25)$$

Application numérique : pour $L = 30 \text{ cm}$ et $m = 360$, il vient $\Delta\nu_c = 16,8 \text{ MHz}$.

23. Cohérence temporelle :

Si nous confondons la forme du pic représentant un mode avec une Gaussienne. Nous pouvons appliquer les résultats obtenus lors de l'étude de la raie rouge du néon. Nous en concluons que la cohérence temporelle (c'est à dire l'inverse de la largeur de raie) est $\frac{785}{16,8} = 46$ fois plus grande pour le mode de cavité que pour la raie spectrale.

Pour obtenir un tracé comparable au tracé 2, il faudrait donc déplacer le miroir sur une longueur 46 fois plus importante. Le déplacement de miroir était globalement de 12 cm pour un déplacement de papier de 1 m , il faudrait donc pouvoir déplacer le miroir de $5,5 \text{ m}$. Ce qui est difficile à réaliser.

On ne peut donc pas utiliser les méthodes interférométriques usuelles pour mesurer la largeur de mode du laser Hélium-Néon à $632,8 \text{ nm}$.

24. Effets de la dilatation :

Compte tenu de la relation $\nu_p = p\frac{c}{2L}$, il vient par différentiation $\frac{d\nu_p}{\nu_p} = \frac{-dL}{L}$ lors d'une évolution *adiabatique* du laser³

Par conséquent pour $\nu_p = \nu_0$ et $d\nu_p = \Delta\nu_c$, il vient $\frac{dL}{L} = \frac{\Delta\nu_c}{\nu_0} = 3,5 \times 10^{-8}$ soit $dL = -L\frac{\Delta\nu_c}{\nu_0} = 1 \text{ nm}$ pour la cavité de 30 cm .

Évaluons la tolérance sur la dilatation des supports de miroir⁴. Il faut que l'effet de la dilatation produise une variation de longueur au plus égale au dL calculé précédemment. Comme les effets sont petits, nous linéarisons la relation de dilatation sous la forme :

$$\alpha = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right) \approx \frac{1}{2e} \frac{dL}{\Delta T},$$

et nous en tirons numériquement :

$$\Delta T \approx \frac{1}{\alpha} \frac{dL}{2e} = 0,05 \text{ K}.$$

3. C'est à dire lorsque l'état du mode actif reste caractérisé par la même valeur de l'entier p .

4. L'énoncé est très critiquable, dans le laser He-Ne, les miroirs sont faits de couches diélectriques déposées sur un substrat de verre...

Cette variation de température est très faible. Un fonctionnement stable ne peut être obtenu qu'au bout d'un temps de fonctionnement suffisant pour que le système soit en régime permanent du point de vue des températures.

II Amplification laser

II.1°) Propagation dans un milieu amplificateur

25. Équations de Maxwell :

Il vient dans le milieu considéré :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

26. Propagation du champ électrique :

calculons $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$ en considérant les fonctions suffisamment régulières pour que la permutation des opérations de dérivation par rapport à l'espace et par rapport au temps soit légitime, il vient :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

et compte tenu de la formule d'analyse vectorielle rappelée par l'énoncé :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (26)$$

Une fois le système de coordonnées choisi, nous obtenons en reportant la solution onde plane homogène monochromatique polarisée rectilignement selon Ox se propageant dans la direction Oz , l'équation de dispersion (condition nécessaire d'existence de la solution recherchée) :

$$k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2 = k^2 - \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (27)$$

27. Indice complexe :

Si nous admettons que la constante diélectrique peut être écrite sous la forme $\epsilon_r = (n + i n')^2$, la relation de dispersion implique que $k = \pm (n + i n') \frac{\omega}{c}$ et la solution recherchée : $\vec{E} = E_0 \exp [i (\omega t - kz)] \vec{e}_x$ peut être développée sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \exp \left[\mp n' \frac{\omega}{c} x \right] \exp \left[i \left(\omega \left\{ t \mp n \frac{z}{c} \right\} \right) \right] \vec{e}_x.$$

L'onde se propageant vers les z croissant est amplifiée si et seulement si $n' > 0$.

28. Champ magnétique :

L'équation de Maxwell-Faraday $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ se réduit, lorsque l'on se restreint à l'ensemble des ondes planes monochromatiques à :

$$-\underline{k} \wedge \underline{E} = -i\omega \underline{B},$$

en notation complexe où la notation \underline{X} désigne le vecteur complexe associé au vecteur réel \vec{X} .

Soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = (n + in') \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_x,$$

que nous réduisons en :

$$\vec{B} = \frac{(n + in')}{c} E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y.$$

Nous remarquons que par rapport au cas d'une onde plane homogène cheminant dans le vide, le champ magnétique *n'est plus en phase avec le champ électrique*⁵.

En notation complexe, le vecteur de Poynting *moyen* est donné par la formule⁶

$$\vec{\pi} = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right).$$

Il vient donc simplement compte tenu des formes de \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} \exp \left[2n' \frac{\omega}{c} z \right] \vec{e}_z = I \vec{e}_z.$$

29. Condition d'entretien des oscillations :

Si nous notons R le coefficient de réflexion en puissance sur le miroir de la cavité résonnante situé en $z = 0$, l'onde électromagnétique aura retrouvé sa puissance initiale après un aller-retour dans la cavité si :

$$R \cdot \exp \left[2n' \frac{\omega}{c} 2L \right] = 1$$

c'est à dire lorsque l'amplification due à la traversée du milieu actif compense exactement les pertes.

Nous en déduisons que :

$$n' = -\frac{c}{4\omega L} \ln R. \quad (28)$$

30. Si n' est supérieur à la valeur limite, il y aura amplification de l'onde lors des aller-retour successifs. Comme pour tous les oscillateurs, il apparaîtra une limitation de l'amplitude due aux effets non-linéaires (essentiellement la saturation du milieu actif) qui n'ont pas encore été pris en compte ici.

II.2°) Phénomènes de saturation et régime stationnaire

31. Inversion de population :

Comme la condition d'amplification est $n' > 1$ et que $n' = \alpha (N_2 - N_1)$ nous en déduisons que $N_2 > N_1$, c'est à dire que le niveau d'énergie le plus élevé est le plus peuplé. On appelle ce phénomène *Inversion de population*, car si on considère le gaz à l'équilibre thermodynamique, le facteur de Boltzmann fait que c'est le niveau d'énergie la plus élevée qui est le moins peuplé.

L'inversion critique est obtenue pour :

$$\Delta N_C = -\frac{c}{4\alpha\omega L} \ln R. \quad (29)$$

5. Je n'ai pas effectué le retour à la notation réelle qui ne fait que produire des calculs inutiles. Quelles sont, à ce stade du problème les exigences du jury ?

6. Le calcul du vecteur de Poynting instantané à partir de la notation réelle est élémentaire mais inutilement compliqué, même remarque que précédemment.

32. Milieu de faible gain :

Nous supposons que $1 - R \ll 1$ ⁷. Si nous appelons I_0 l'intensité de l'onde qui part du miroir en $z = 0$, cette onde sera amplifiée de manière telle qu'après avoir traversé deux fois le milieu actif, son intensité est devenue $\frac{I_0}{R}$ puisque après réflexion sur le miroir placé en $z = 0$ on retrouve l'intensité initiale I_0 . Comme dans la cavité, l'intensité croît exponentiellement lors de son parcours et que cette fonction est continue et monotone croissante, on peut affirmer qu'en tout point de la cavité :

$$I_0 \leq I \leq \frac{I_0}{R} \approx I_0 + (1 - R)I_0.$$

Comme R est très proche de 1, $I \approx I_0$ en tout point.

Nous avons montré que $n' = \frac{c}{4\omega L} \ln R$ comme $R \approx 1$, nous posons que $R = 1 + (R - 1)$ par conséquent, un développement du logarithme limité au premier ordre en $1 - R$ fournit :

$$n' = -\frac{c}{4\omega L} \ln R \approx \frac{c}{4\omega L} (1 - R),$$

Le gain sur un aller retour est facile à évaluer, il vaut :

$$\Delta I_g = \frac{I_0}{R} - I_0 = I_0 \frac{1 - R}{R},$$

et compte tenu du calcul précédent :

$$\Delta I_g \approx \frac{4n'\omega L}{c} I_0 \quad (30)$$

33. Établissement du régime permanent :

Nous pouvons considérer que la variation d'amplitude de l'onde pendant un aller retour dans la cavité résulte du bilan de puissance prenant en compte le gain sur un aller-retour et les pertes sur le miroir. Par conséquent :

$$\frac{dI_0}{dt} = \frac{\Delta I_g - \Delta I_p}{\frac{2nL}{c}} = \frac{c}{2nL} \left[-\frac{1 - R}{R} I_0 + \frac{4n'\omega L}{c} I_0 \right].$$

Soit, en tenant compte des expressions déjà obtenues :

$$\frac{dI_0}{dt} = \frac{c}{2nL} \frac{(1 - R)}{R} \left(-1 + \frac{4\omega L \alpha R}{c(1 - R)} \Delta N \right) I_0.$$

En posant par conséquent :

$$\gamma = \frac{c}{2nL} \frac{1 - R}{R} \quad (31)$$

$$g = \frac{4\omega L \alpha R}{c(1 - R)} \quad (32)$$

il vient sous forme réduite :

$$\frac{dI_0}{dt} = \gamma (-1 + g \Delta N) I_0 \quad (33)$$

7. C'est effectivement le cas pour le laser He-Ne à 632.8 nm

34. Régime stationnaire : Inversion de population :

On admet la loi d'évolution de ΔN :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{\Delta N - \Delta N_0}{\tau} - \beta \Delta N I_0. \quad (34)$$

Comme en régime stationnaire $\frac{d\Delta N}{dt} = 0$, il vient immédiatement :

$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + \beta \tau I_0} = \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{I_0}{I_s}}$$

Donc $I_s = \frac{1}{\tau \beta}$.

35. Solutions stationnaire pour l'intensité :

Pour l'intensité, il vient en régime stationnaire :

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \gamma (-1 + g\Delta N) I_0 = \gamma \left(-1 + g \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \right) I_0.$$

Il apparaît alors immédiatement les deux racines :

$$I_0 = I' = 0 \quad (35)$$

$$I_0 = I'' = I_s (g\Delta N_0 - 1) = (\eta - 1) I_s. \quad (36)$$

avec $\eta = g\Delta N_0$.

Pour solution stationnaire $I_0 = (\eta - 1) I_s$, l'inversion de population associée a pour valeur

$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + \eta - 1} = \frac{\Delta N_0}{\eta}$$

36. Stabilité de I'' :

Les données de l'énoncé ne faisant intervenir que I'' et δI_0 suggèrent l'écriture d'une équation différentielle du premier ordre seulement. Nous supposons donc l'inversion de population garde sa valeur stationnaire.

L'équation :

$$\frac{dI_0}{dt} = \gamma \left(-1 + g \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \right) I_0$$

est donc conservée.

La forme de cette équation étant $\frac{dI_0}{dt} = \varphi(I_0)$ au voisinage de la racine $\varphi(I'') = 0$, nous procédons à un développement limité au premier ordre en δi .

$$\varphi(I'' + \delta i) = \varphi(I'') + \left(\frac{d\varphi}{dI} \right)_{I''} \delta i = 0 + \left(\frac{d\varphi}{dI} \right)_{I''} \delta i$$

et comme $I_0 = I'' + \delta i$ l'équation différentielle recherchée est :

$$\frac{d}{dt} \delta i = \left(\frac{d\varphi}{dI} \right)_{I''} \delta i. \quad (37)$$

Il nous reste à étudier la dérivée, il vient immédiatement :

$$\frac{d}{dt} \delta i = \gamma \left[\left(-1 + g \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \right) - \frac{g \Delta N_0}{\left(1 + \frac{I_0}{I_s}\right)^2} \frac{I}{I_s} \right] \delta i. \quad (38)$$

En $I_0 = I''$ il ne reste que le second terme entre crochets donc :

$$\frac{d}{dt} \delta i = -\gamma g \frac{\Delta N_0}{\left(1 + \frac{I''}{I_s}\right)^2} \frac{I''}{I_s} \delta i = -\gamma g \Delta N_0 \frac{\eta - 1}{\eta^2} \delta i.$$

Nous obtenons alors une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont la solution est évidemment :

$$\delta i = \delta I_0 \exp \left(-\gamma g \Delta N_0 \frac{\eta - 1}{\eta^2} t \right). \quad (39)$$

Le régime stationnaire $I_0 = I''$ n'est donc stable que si $\eta > 1$.

37. Stabilité de I' :

Nous reprenons directement l'équation (38), en En $I_0 = I'$ il ne reste que le premier terme entre crochets donc l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \delta i = \gamma (-1 + g \Delta N_0) \delta i$$

de solution :

$$\delta i = \delta I_0 \exp [\gamma (-1 + g \Delta N_0) t].$$

Cette solution ne sera stable que si $g \Delta N_0 = \eta < 1$.

38. Évolution du mode stable :

Pour $0 \leq \eta \leq 1$, $I_0 = 0$ tandis que pour $1 < \eta$, $I_0 = (\eta - 1) I_s$, le graphe est donc élémentaire :



FIGURE 4 – Évolution du mode stable

Le laser ne peut émettre, compte tenu de ce graphe que si $\eta > 1$, comme $\eta = g \Delta N_0$, il vient au seuil :

$$\Delta N_0 = \frac{1}{g}.$$

39. Étude de ΔN en fonction de η :

Quand la solution I_0 est nulle, c'est à dire pour $\eta \leq 1$, il vient immédiatement en régime stationnaire $\Delta N = \Delta N_0$ d'après l'équation (34).

Pour la solution I'' , solution stable lorsque $\eta > 1$, il vient nécessairement $\Delta N = \frac{1}{g} = \frac{\Delta N_0}{\eta}$, d'où la représentation graphique.

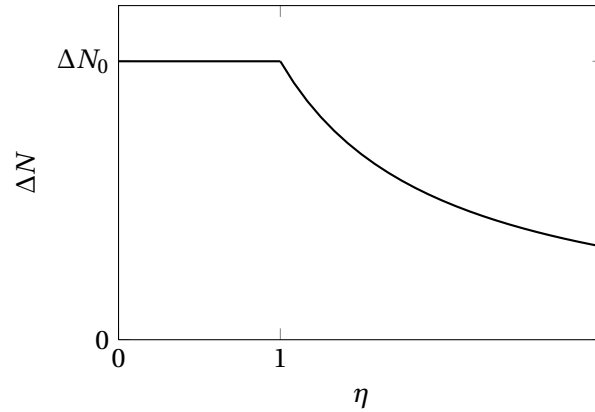


FIGURE 5 – Allure de la courbe $\Delta N(\eta)$

Par conséquent, $\Delta N \leq \Delta N_0 = \Delta N_s$. Le fonctionnement ne peut intervenir que si $\Delta N_s > \Delta N_c$. Nous avons établi que $\Delta N_c = -\frac{c}{4\alpha\omega L} \ln R$ (29) et nous venons de montrer que $\Delta N_0 = \frac{1}{g} = \frac{c(1-R)}{4\omega L\alpha R}$ d'après l'équation (32) il est donc immédiat de calculer la quantité :

$$\frac{\Delta N_s}{\Delta N_c} = -\frac{1-R}{R \ln R} > 1$$

Par conséquent, si l'amplification est suffisante, le laser va se mettre à osciller, mais à mesure que l'intensité augmente, l'amplification (par l'intermédiaire de ΔN diminue à pompage constant. On obtiendra donc rapidement une situation stable. (Pour le laser considéré, le fonctionnement est toujours proche du seuil.)