A. Domps - G. Requin

Ecole Normale Supérieure

Concours d'admission 2014 Filière **PC**

Composition de Physique – C – (U)

(Durée : 6 heures)

La mission Planck

I – Le fond diffus cosmologique

Q1. I_ν est en $W.m^{-2}Hz^{-1}sr^{-1}$ (On pourra rappeler que l'angle solide ne figure pas au programme de PC ? et le rappel de l'énoncé ne peut tenir lieu d'une familiarité avec le concept). u_ν est en $J.m^{-3}Hz^{-1}$ et F_ν s'exprime en $W.m^{-2}Hz^{-1}$.

Q2. En comptant le nombre de photons dN_ν qui passe à travers la surface $\boldsymbol{dA}$ pendant dt, on obtient : $dE_\nu = h\nu\, dN\nu = h\nu\, N_\nu\, d\nu d\Omega \boldsymbol{dA}.\boldsymbol{cu}\, dt$ d'où par identification : $I_\nu = h\nu c N_\nu$.

Q3. Si on se place dans toute la suite dans l'étude d'un rayonnement isotrope alors les deux premières questions utilisant l'angle solide n'ont servi qu'à déstabiliser les candidats …
Avec $n_\nu = N_\nu/4\pi$, il vient $I_\nu = n_\nu h\nu c/4\pi$.

Q4. Dans les intégrales de définition : $u_\nu = I_\nu 4\pi/c = n_\nu h\nu$ et $p_\nu = 4\pi I_\nu/3c$. On remarque que $p = u/3$ pour chaque fréquence.

Q5. Pour avoir $F^+{}_\nu$ il faut intégrer la relation de définition de 0 à 2π pour ϕ mais seulement de 0 à $\pi/2$ pour θ afin de ne compter que le bon sens de passage à travers $\boldsymbol{dA}$. $F^-{}_\nu$ sera obtenu par une intégration en θ de $\pi/2$ à π et sera identique à $F^+{}_\nu$. Algébriquement la densité spectrale de flux est nulle à travers toute surface. C'est le propre d'un rayonnement isotrope.

Q6. Il faut trouver l'extremum (pour une fonction strictement positive avec deux zéros, ce sera un maximum s'il est unique) de la fonction : $\dfrac{x^{\beta+3}}{e^x-1}$ soit $e^x = \dfrac{\beta+3}{(\beta+3)-x}$.

Q7. En posant $x = (\beta + 3) - \varepsilon$, on obtient $\varepsilon = (\beta + 3)\, e^{-(\beta+3)}$ ce qui donne le résultat proposé. Dans l'expression de $\nu_{m,\beta}$ le facteur exponentiel étant faible, la variation de $\nu_{m,\beta}$ ext approximativement linéaire. Enfin pour le corps noir : $\nu_{m,0} = 5.94\ 10^{10}$ Hz/K = 59.4 $GHzK^{-1}$.

Q8. La relation $F = \int \pi I_\nu d\nu$ et le changement de variable $\nu = kTx/h$ amènent à $F = \dfrac{2\pi\Lambda h}{c^2}\left(\dfrac{kT}{h}\right)^{\beta+4} Q(3+\beta)$ où l'on reconnaît la constante $\sigma_{\beta,\Lambda}$.

Q9. $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} = 5.67 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$

Q10. $u = \int u d\nu = \dfrac{4\pi}{c}\int I_\nu d\nu = \dfrac{4}{c}F = \dfrac{4\sigma}{c}T^4$

Q11. Q12. Loi de Wien : $B_\nu(T) = \dfrac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ et loi de Rayleigh Jeans : $B_\nu(T) = \dfrac{2\nu^2 kT}{c^2}$

Q13. $U(T, V) = u\,V$.

Q14. On donne la définition des coefficients calorimétriques : $TdS = C_v dT + l\,dV$, et la première identité thermodynamique s'écrit $dU = -\,pdV + TdS$, dans laquelle il faut utiliser la pression de radiation $p = u/3$ (Q4). Alors $dU = (l - p)\,dV + C_v dT$ et par identification :

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = V\left(\frac{du}{dT}\right) \quad \text{et} \quad l - p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = u \quad \text{soit} \quad l = \frac{4}{3}u$$

L'équation différentielle de S : $dS = \dfrac{V}{T}\left(\dfrac{du}{dT}\right)dT + \dfrac{4}{3}\dfrac{u}{T}dV$

Q15. Du développement précédent on tire les équations aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial S}{\partial V} = \dfrac{4}{3}\dfrac{u}{T} \Rightarrow S(T,V) = \dfrac{4}{3}\dfrac{u}{T}V + f(T)$ et $\dfrac{\partial S}{\partial T} = \dfrac{V}{T}\left(\dfrac{du}{dT}\right) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{d(u/T)}{dT}\right)V + f'(T)$ soit après avoir exprimé $u = 4\sigma T^4/c$: $f'(T) = 0$ soit $f(T) = S(0) = 0$ et on a bien $S(T,V) = \dfrac{16\sigma}{3c}VT^3$.

Q16. Détente adiabatique réversible : $dS = 0$ soit $S = Cte$ soit ici $VT^3 = Cte$, et par analogie avec la loi de Laplace $TV^{\gamma-1} = Cte$, $\gamma = 4/3$.

Q17. $T_{CMB} = T_{LSS}\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sinh\left(\dfrac{bt_{LSS}}{t_0}\right)}{\sinh(b)}\right)^2} = 2.358\,\text{K}$

Q18. D'après Q7, et pour le corps noir cosmologique $\nu_{max} = 59.4*2.725 = 161.2$ GHz.

Q19. Les bandes de fréquences choisies sont bien réparties de part et d'autre de la fréquence maximum pour enregistrer le spectre d'émission du corps noir cosmologique.

Q20. A partir de $I_0(\theta) = h\nu_0\, cN_0(\theta, \phi)$ et en posant $X = \nu_0/\nu_e$: $I_0(\theta) = hX\nu_e\, cN_e X^2$
soit $I_0(\theta) = X^3 hc\nu_e N_e = X^3\, I_e(\theta) = X^3 I_e = X^3 B_{\nu e}(T_{CMB})$

$$= \frac{2hX^3\nu_e^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\nu_e}{kT_{CMB}}\right)-1} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\nu_0}{kT(\theta)}\right)-1} \text{ pour } T(\theta) = X\,T_{CMB} = T_{CMB}\left(\frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c - v\cos\theta}\right)$$

Q21. Avec $v \ll c$, $T(\theta) \cong T_{CMB}\,(1 + v\cos\theta/c)$. Dénomination dipolaire par analogie avec les potentiels des dipôles électrostatiques en $\cos\theta$?

Q22. $\Delta T_{dipôle} = 2v/c\; T_{CMB}$ d'où numériquement $v = 3.68\ 10^5\,\text{ms}^{-1}$.

Q23. $v_{TS} = 2\pi D_T$ / 1an = $2.95\ 10^4\,\text{ms}^{-1}$ et $v_{SG} = 2\pi D_*/T_* = 2.25\ 10^5\,\text{ms}^{-1}$. Ce sont des vitesses du même ordre de grandeur que celles qui ont été mises en évidence par le décalage de fréquence.

Q24. Le calcul de la variation relative donne : $\dfrac{\delta B_\nu}{B_\nu} = -\dfrac{xe^x}{e^x - 1}\dfrac{\delta T_{CMB}}{T_{CMB}}$. L'application numérique avec $x = \dfrac{h\nu}{kT_{CMB}} = 2.51$, donne $\delta B_\nu/B_\nu = 2.74\ \delta T_{CMB}/T_{CMB} \sim 2.74\ 10^{-5}$.

II – L'émission thermique des poussières de la Galaxie

Q25. La section efficace a la dimension d'une surface.

Q26. Avec σ_ν et n_d constants on obtient immédiatement $I_\nu(s) = I_\nu(0)\exp(-\sigma_\nu n_d s) = I_\nu(0)\exp(-\tau_\nu(s))$

Q27. Pour 143 GHz, la longueur d'onde $\lambda = 2$ mm est supérieure à 100 µm.

Q28. L'application numérique sur la formule de la Q7 donne pour $\beta = 1$, $\nu_{m,1} = 1.39\ 10^{12}$ Hz = 1390 GHz et pour $\beta = 2$ $\nu_{m,2} = 1.756\ 10^{12}$ Hz = 1756 GHz.

Q29. $dP_e = \Sigma F_\nu d\nu = 4\pi^2 a^2 I_\nu d\nu$ pour un grain de poussière sphérique, d'où l'expression.

Q30. Le calcul est très semblable à celui effectué en question Q8 …

Q31. Pour l'étoile corps noir la loi de Stefan donne : $P_T = 4\pi R_*^2\ \sigma T_*^4$.

Q32. A la distance d cette puissance s'est répartie uniformément sur une surface de $4\pi d^2$ et la puissance surfacique a été interceptée par l'aire $\pi a^2 = \sigma$ puisqu'on admet que $Q_\nu = 1$.

Q33. En égalant P_e et P_a à l'équilibre : $C_\beta = \left(\dfrac{\sigma c^2 h^{3+\beta}}{8\pi\varepsilon_0 Q(3+\beta)k^{4+\beta}}\right)^{\frac{1}{4+\beta}}$

Q34. Sans garantie absolue ! : $C_2 = 5.57\ 10^{-1}$ et $T_d = 359$ K.

Q35. Cette température est bien plus forte que celle annoncée ~ 10 à 20 K … ??

Q36. Dans les agrégats il faudrait tenir compte des échanges de puissances rayonnées entre les composants des agrégats et l'ombre apportée les uns aux autres pour modifier la puissance reçue.

Q37. On multiplie la puissance émise dans toutes les directions de la Q29 par $d\Omega/4\pi$.

Q38. En tenant compte du nombre dN de grains présents dans le volume élémentaire $dV = dAds$ choisi, l'énergie émise par l'ensemble des grains pendant la durée dt est :

$$dE_\sigma^+ = 4\pi^2 a^3 \varepsilon_0 \nu^\chi B_\nu(T_d)d\upsilon \frac{d\Omega}{4\pi} n_d\, dA\, ds\, dt$$

on introduit $\sigma_\nu = \pi a^2$ et l'émissivité $\varepsilon_\nu = a\varepsilon_0\nu^\beta$ est prise égale à 1 (hypothèse du grain de poussière assimilable à un corps noir de température T_d), il reste alors : $dI^+_\nu = \sigma_\nu B_\nu(T_d) n_d ds$.

Q39. Le bilan dans le volume dV entre l'émission et l'absorption donne l'équation proposée.

Q40. L'intégration donne $I_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T_d) + (I_\nu(0) - B_\nu(T_d))\exp(-\tau_\nu)$. $I_\nu(0) = B_\nu(T_{CMB})$; les formules limites sont : $\tau_\nu(L) \gg 1 \rightarrow I_\nu(\tau_\nu(L)) = B_\nu(T_d)$ on perçoit juste le rayonnement du nuage lui-même ; $\tau_\nu(L) \ll 1 \rightarrow I_\nu(\tau_\nu(L)) = B_\nu(T_{CMB}) - (B_\nu(T_{CMB}) - B_\nu(T_d))\ \tau_\nu(L)$.

Q41. $\dfrac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = \dfrac{B_\nu(T_{CMB}) - B_\nu(T_d)}{B_\nu(T_{CMB})}\tau_\nu(L) = \left(1 - \dfrac{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT_{CMB}}\right) - 1}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT_d}\right) - 1}\right)\tau_\nu = -21.9\ \tau_\nu(L)$, on obtient donc une variation relative de $4.5\ 10^{-7}$ de l'intensité perçue dans les visées en dehors du plan galactique et 2.26 % dans les visées dans le plan galactique.

Q42. Pour les visées dans le plan galactique c'est évident, pour les visées en dehors du plan galactique la correction est inférieure aux variations dues aux fluctuations de T_{MCB} (*Q24*) de l'ordre de 2.7 10^{-5}. (si nos calculs numériques sont corrects)

III – Détection bolométrique

Q43. En l'absence de rayonnement absorbé la température du système est à l'équilibre à celle du thermostat T_s.

Q44. Un bilan du premier principe appliqué à l'élément absorbant entre deux instants t et $t + dt$: $CdT = P_0\, dt - G(T - T_s)dt$. Cette équation fait apparaître un temps caractéristique $\tau = C/G$, une température d'équilibre $T_e = T_s + P_0/G$ et la solution : $T(\mathrm{t}) = T_e + (T_s - T_e) \exp(-t/\tau)$.

Q45. Avec $P_0 = 0$ et la condition initiale T_e la nouvelle solution est : $T(\mathrm{t}) = T_s + (T_e - T_e) \exp(-t/\tau)$.

Q46. A mi hauteur $I(\theta) = I_0/2$ soit $I(u) = 0.5$ pour $u = \pi D\nu \sin\theta/c = 1.616$. Alors $\psi = 2\theta = (2{*}1.616/\pi)(c/D\nu)$, la constante $b = 1.03$. Et $\psi(143\text{GHz}) = 1.43\ 10^{-3}$ rad = 5 ' d'angle environ.

Q47. Si ν peut varier de 30% en valeur relative alors ψ variera aussi de 30% en valeur relative : $\Delta\psi = 4.4\ 10^{-4}$ rad.

Q48. En calculant à partir de la définition $\Omega = \int d\Omega = 2\pi\int \sin\theta\, d\theta = 2\pi\,(1 - \cos\theta) \cong \pi\theta^2$ pour les petits angles, donc l'angle solide correspondant à la tache centrale sera $\Omega(\nu) \cong \pi\psi(\nu)^2/4$.

Q49. Le pas angulaire est $\omega_s\delta t$ et le critère impose $\omega_s\delta t_{max} < \psi(\nu)/2$, donc $\tau_{max} = \psi(\nu)/10\omega_s$.

Q50. Numériquement $\tau_{max} = 1.40\ 10^{-3}$ s.

Q51. $\omega_P = \omega_{terre} = 2\pi/T_{année} = 2\ 10^{-7}$ rad s^{-1} ; en prenant la durée de l'année comme 365,25 jours de 86400 s.

Q52. Si on considère le satellite comme isolé, son axe de rotation propre reste invariable alors que l'alignement avec le Soleil varie à la vitesse angulaire ω_s, il y a donc un décalage $\delta\theta_p = \omega_p\delta t_p$ croissant au cours du temps entre les deux directions. Si on veut que ce $\delta\theta_p$ reste inférieur à $\psi(\nu)/2$, il faudra corriger l'orientation du satellite tous les $\delta t_p = \psi(\nu)/2\omega_p = 3575$ s soit environ une fois par heure.

Q53. Δt_{survey} = 6 mois pour que les grands cercles explorés par la direction d'observation aient balayé tout l'espace. En deux ans et demi, le satellite a donc couvert 5 fois le ciel complet. (En fait un tout petit peu moins car la mission a duré du 14 août 2009 au 14 janvier 2012)

Q54. Dans le bilan thermique de l'absorbant il faut rajouter l'effet Joule de la résistance au contact et la notation de T_e contient la partie P_0 constante de la puissance reçue, d'où l'équation fournie. En l'absence de perturbation le régime est permanent et $T_0 = T_e + R(T)i_o^2/G$.

Q55. En introduisant dans l'équation de Q54, $T(t) = T_0 + \delta T$ et $R(T) = R(T_0) + R'(T)\,\delta T$:

$\tau\dfrac{d\delta T}{dt}+T_0+\delta T=T_e+\dfrac{1}{G}\left(\delta P+R(T_0)i_0^2\right)+\dfrac{1}{G}R'(T)i_0^2\delta T$ et après simplification par le régime permanent étudié précédemment : $\tau\dfrac{d\delta T}{dt}+\left(1-\dfrac{R'(T_0)i_0^2}{G}\right)\delta T=\dfrac{1}{G}\delta P$, avec $\tau = C/G$ de Q44 il apparaît bien le temps de réponse effectif τ_e de l'énoncé.

Q56. Pour la stabilité il faut que le coefficient τ_e soit positif. Or la fonction $R(T)$ est décroissante (ce qui n'est pas le cas des conducteurs usuels aux températures usuelles, il n'y a d'ailleurs pas de supraconductivité pour ce matériau à ces si faibles températures) donc c'est assuré et il y aura bien une tendance asymptotique à l'équilibre en régime permanent. Numériquement : $R(T_0)$ = 7.38 MΩ.

Q57. $\delta V = \delta R i_0 = R'(T_0)i_0\delta T$ et l'équation de Q55 en complexe est du premier ordre et avec une variation harmonique de δP : $\left(j\omega\tau_e+1\right)\underline{\delta T}=\dfrac{1}{G}\dfrac{\underline{\delta P}}{\left(1-\dfrac{R'(T_0)i_0^2}{G}\right)}$ on en tire la relation des modules des fluctuations donnée par l'énoncé avec $S_0=\left|\dfrac{R'(T_0)i_0}{\left(G-R'(T_0)i_0^2\right)}\right|$.

Q58. On calcule d'abord $R'(T)=-\dfrac{R_0}{2T^2}\sqrt{TT_g}\,\exp\left(\sqrt{\dfrac{T_g}{T}}\right)$ alors à T_0 = 0.1 K, $R'(T_0)$ = – 4.95 10^8 ΩK^{-1}, τ_e = 2.37 ms et S_0 = 1.17 10^9 VW^{-1} ; à T_0 = 4 K, $R'(T_0)$ = – 24.3 ΩK^{-1}, τ_e = 13.5 ms et S_0 = 329 VW^{-1} (à cette température les échanges thermiques avec la thermistance sont négligeables). (Il est étonnant que ces durées soient supérieures à τ_{max} de Q50 ?)

Q59. En reprenant la première expression définissant I_ν :

$$dP_\nu = \eta\, T(\nu)\, dE_\nu/dt = \eta\, T(\nu)\, I_\nu \cos\theta\, dA\, d\Omega\, d\nu$$

puis on remplace $\cos\theta \cong 1$, $dA = \pi D^2/4$, $d\Omega = \pi\psi(\nu)^2/4 = \pi(bc)^2/(D\nu)^2$ et en intégrant ensuite sur toute les fréquences on retrouve bien l'expression de P_0 fournie.

Q60. $P_0=\eta\left(\dfrac{\pi bc}{4}\right)^2 I_\nu(\nu_0)\displaystyle\int_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2}\dfrac{d\nu}{\nu^2}=\eta\left(\dfrac{\pi bc}{4}\right)^2 I_\nu(\nu_0)\dfrac{\Delta\nu}{\left(\nu_0^2-\Delta\nu^2/4\right)}$ et $\eta = 1$.

Q61. Sans garantie, avec $I_\nu(\nu_0) = B_\nu(T_{CMB})$ je trouve P_0 = 5.1 10^{-13} W .

Q62. $\delta P/P_0 = \delta V/(S_0P_0)$ = 1.67 10^{-5} à 0.1 K et 59.6 à 4 K, c'est donc à 0.1 K qu'il faut faire fonctionner le bolomètre.

Q63. Les fluctuations du fond diffus étaient de 2.7 10^{-5} , on est dans la bonne gamme …

IV – Architecture cryogénique

Q64. Sans autre travail que celui des forces de pression amont et aval et en négligeant les énergies cinétiques (écoulement lent), l'application du premier principe en régime stationnaire avec un débit molaire $\check{n} = dn/dt$ aboutit à la forme « industrielle » du premier principe $\Delta h = h_2 - h_1 = \delta q/\mathrm{d}n = 0$ avec des parois calorifugées : h = cte, c'est la détente de Joule – Thomson.

Q65. L'égalité proposée définit le coefficient calorimétrique noté usuellement k par l'égalité $Tds = c_P dT + kdP$. L'identité thermodynamique pour h s'écrit $dh = v\,dP + Tds$ et pour $dh = 0$ la relation donne : $0 = vdP_h + c_P dT_h - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dP_h$ et $\mu_{JT} = \frac{dT_h}{dP_h} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h$

Q66. Dans le cas du modèle du Gaz Parfait, $\mu_{JT} = 0$, c'est la seconde loi de Joule.

Q67. A partir de l'équation de VdW écrite sous la forme $P = f(v,T)$, on détermine les deux dérivées à $T = T_c$ = cte, dP/dv et d^2P/dv^2. Au point critique ces deux dérivées sont nulles et le calcul donne $v_c = 3b$ et $RT_c = 8a/27b$ et enfin $P_c = a/27b^2$.

Q68. Par substitution de P, v et T dans l'équation de Van der Waals en fonction de P_c, v_c et T_c : $\left(P_r + \frac{3}{v_r^2}\right)\left(v_r - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}T_r$; ce qui est une équation d'état de Van der Waals « universelle ».

Q69. Avec les coordonnées réduites : $\mu_{JT} = \frac{3b}{c_P}\left[T_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial T_r}\right) - v_r\right]$; Ce coefficient s'annule pour $T_r = v_r\,(\partial T_r/\partial v_r)$ (*) et il suffit de calculer la dérivée :

$$\frac{\partial T_r}{\partial v_r} = \frac{3}{8}\left(P_r + \frac{3}{v_r^2}\right) - \frac{3\times 6}{8v_r^3}\left(v_r - \frac{1}{3}\right) = \frac{T_r}{\left(v_r - \frac{1}{3}\right)} - \frac{9}{v_r^3}\left(v_r - \frac{1}{3}\right)$$

Puis de la remplacer dans la condition (*) pour obtenir l'expression de $T_{r,i}$ fournie.

Q70. En remplaçant T_r par $T_{r,i}$ dans l'équation réduite de VdW, on obtient la seconde équation paramétrique de P_r en v_r : $P_r = 9\frac{(2v_r - 1)}{v_r^2}$. La courbe est tracée pour $v_r > 0.5$, on y reconnaît les points ($v_r = 0.5$, $P_r = 0$ et $T_{r,i} = 3/4 = 0.75$), ($v_r = 1$ $(dPr/dv_r) = 0$, $P_r = 9$ et $T_{r,i} = 3$) et ($v_r\ \infty$, $P_r = 0$ et $T_{r,i} = 27/4 = 6.75$).

Q71. Avec $dP < 0$ dans la détente de Joule Thomson et à h = cte, si on souhaite $dT < 0$ il faut que le coefficient μ_{JT} soit > 0. Il s'agit donc de rester dans le domaine fermé de la courbe d'inversion.

Q72. Les températures maximale et minimale de ce domaine sont $T_{max} = 27T_c/4$ et $T_{min} = 3T_c/4$ soit pour H : (224.1 K ; 24.9 K) et pour ^{4}He : (35.0 K et 3.9 K) à des pressions les plus faibles possibles.

Q73. Par définition, $L_v(T) = h_g - h_l$, et en utilisant la relation d'équilibre $g_l = g_g$ on déduit la seconde relation. $L_v = T\,(s_g - s_l)$.

Q74. La relation d'équilibre entre deux phases est l'égalité des enthalpies libres molaires : $g_i = h_i - T\,s_i$ soit ici $g_g = g_l$.

Q75. Entre deux états voisins de la courbe de saturation les variations élémentaires dg_i ($v_i\,dP_s - s_i\,dT_s$) sont égales, $dg_l = dg_g$ ce qui aboutit immédiatement à la relation de Clapeyron.

Q76. Avec l'hypothèse confortable $v_g \gg v_l$ et l'hypothèse plus critiquable du modèle de gaz parfait au voisinage d'un changement d'état $v_g = RT/P$, la loi de Clapeyron se transforme en équation différentielle : $\dfrac{dP_s}{P_s} = \dfrac{L_v dT}{RT^2} \quad \Rightarrow \quad P_s(T) = P_a e^{-\frac{L_v}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_a}\right)}$. L'allure de la courbe est visuellement une branche d'exponentielle.

Q77. Dans un premier temps il y a une détente adiabatique de la phase du gaz pompé jusqu'à obtenir l'équilibre de température et de pression du changement d'état, alors il y a évaporation d'une partie du liquide sans changement de pression ni de température, mais le refroidissement du composant qui cède son énergie fait baisser la température du liquide et en conséquence la pression d'équilibre au dessus qui est la pression de pompage ; au fur et à mesure la pression de pompage diminue en suivant a courbe $P_s(T)$ précédente.

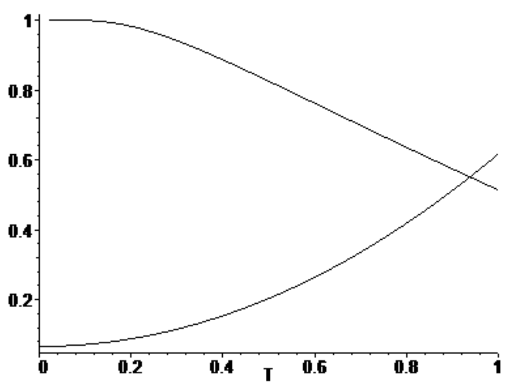
Q78. $\dot{q}_E = \check{n}\, L_v = C L_v P_s(T) \propto e^{-\frac{L_v}{RT}}$ donc décroissant au fur et à mesure que la température décroît. Le procédé perd de son efficacité aux très basses températures.

Q79. $\dfrac{1}{T_{\min}} = \dfrac{1}{T_a} + \dfrac{R}{L_v}\ln\left(\dfrac{P_a}{P_{\min}}\right)$ puisqu'on est resté sur a courbe de changement d'état pendant tout le pompage.

Q80. A. N. T_{min} = 1.075 K pour ^{4}He et T_{min} = 0.396 K pour ^{3}He. C'est la gamme de température nécessaire pour démarrer le réfrigérateur à dilution de la question suivante.

Q81. T_λ est la température d'intersection des courbes $x_{3,c}$ et $x_{3,d}$. L'intersection donne $T = 0.939$ pour $x = 0.55$.

A $T_0 = 0.1$ K, $x_{3,c} = 1 - 6.88\ 10^{-4}$ et $x_{3,d} = 0.0715$. Pour $T \to 0$: $x_{3,c} \to 1$ et $x_{3,d} \to 0.066$. On prendra ces valeurs limites dans la suite.



Q82. En négligeant les variations de pression : $dh_{3c} = c_{3c}dT = b_c T dT$ et $h_{3c}(T) = h_{3c}(0) + b_c T^2/2$

Q83. De même : $ds_{3c} = c_{3c}dT/T$ et $ds_{3d} = c_{3d}dT/T$ d'où : $s_{3c}(T) = 0 + b_c T$ et $s_{3d}(T) = 0 + b_d T$.

Q84. La condition d'équilibre s'écrit : $h_{3d} - Ts_{3d} = h_{3c} - Ts_{3c}$ ce qui donne la relation indiquée à la température d'équilibre.

Q85. $\dot{q}_D = \check{n}_3\,(h_{3d}(T) - h_{3c}(T)) = \check{n}_3\,(b_d - b_c)\,T^2$.

Q86. Numériquement : $\dot{q}_D = 5.88\ 10^{-6}$ W = 5.88 µW bien supérieur à la puissance extraite par le refroidissement par pompage.
