1) **a)** C'est une onde se propageant selon $\vec{e}_z$, de fonction de phase sinusoïdale, avec pulsations temporelle ω et spatiale k, de champ $\vec{E}$ transverse à la propagation, de champ $\vec{B}$ non transverse, d'amplitude modulée en x de façon sinusoïdale, donc non plane.

2) **a)** Projetons l'équation d'onde $\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ sur $\vec{e}_y$ pour le champ électrique $TE_{n,0}$:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \left(-k^2 - \left[\frac{n\,\pi}{a}\right]^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y = 0\,.$$

Le champ $TE_{n,0}$ est solution si et seulement si $[k\,,\,\omega\,,\,n]$ vérifient la (RD) : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \left[\dfrac{n\,\pi}{a}\right]^2$ c.-à-d.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{c_n}^2\,.$$

Il se propage si et seulement si le guide est excité à une pulsation temporelle vérifiant :

$\omega > \omega_{c_{(n0)}} = \dfrac{n\,c\,\pi}{a}$. Il y a une pulsation critique par mode TE_{n0}. Le guide est un filtre passe-haut pour le mode TE_{n0}.

Si $\omega < \omega_{c_{(n0)}}$:

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{z}{c}\sqrt{\omega_{c_{(n0)}}^2 - \omega^2}\right) \times$$

$... \sin\left(k_{c_n} x\right) \cos\left(\omega\, t\right) \vec{e}_y$. Ce champ ne se propage pas ; c'est une onde stationnaire évanescente. La plus faible fréquence propagative d'un mode TE_{n0} est : $f_{c_{(10)}} = \dfrac{c}{2\,a}$.

b) Sa largeur selon Ox est :

$$a = \frac{c}{2\,f_{c_{(10)}}} = 3\,\text{cm}.$$

c) Si $TE_{n,0}$ est dans la bande passante, sa vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\left(1 - \omega_{c_{(n0)}}^2/\omega^2\right)^{-1/2}$$

et $v_\varphi > c$.

et la vitesse d'enveloppe d'un paquet d'ondes resserré autour de ω vaut sensiblement, dans le mode $TE_{n,0}$:

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2\,k}{\omega},$$

$$v_g = c\left(1 - \omega_{c_{(n0)}}^2/\omega^2\right)^{1/2} < c.$$

Pour $\omega = \omega_{c_{(n0)}}$ on a : $v_\varphi \to \infty$ et $v_g = 0$! Pour qu'il propage une de ses fréquences propres, il faut exciter le guide à une fréquence supérieure à elle.

Pour une pulsation ω, plusieurs modes propres peuvent se propager, correspondant, à cette pulsation, à des valeurs différentes de k, de v_φ et de v_g. Pour $\omega = 3.5\,\omega_{c_{(10)}}$, les trois premiers modes $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ se propagent (cf figure). Il y a dispersion à cause du guidage de la propagation.

d) Initialement, le paquet a une enveloppe gaussienne. Son spectre est donc une gaussienne centrée en ω_0. Comme en propagation libre, il s'aplatit, s'élargit par dispersion. De plus, ce guide le dédouble. Comme $\omega_0 = 2.5\,\omega_{c_{(10)}}$, seuls les modes $n = 1$ et $n = 2$ peuvent se propager. Au-delà d'une distance parcourue, il ne reste quasiment plus qu'eux dans le spectre, car les autres fréquences ne se sont pas propagées. Les modes TE_{10} et TE_{20} n'ayant pas même vitesse de phase, ils ségrègent pour donner un paquet à deux bosses.

3) Énergie véhiculée

a) On a : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_y\, B_z \vec{e}_x - E_y B_x \vec{e}_z\right].$$

Pour le mode TE_{n0}, E_y et B_z sont en quadrature de phase, on a :

$< E_y B_z >= 0$ et : $< \Pi_x >= 0$.

Et $< \cos^2[\omega\, t - kz] >= \dfrac{1}{2}$ donc :

$$< \vec{\Pi}_{(n0)} >= \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left[\frac{n\pi\, x}{a}\right] \vec{e}_z.$$

La puissance véhiculée à travers

la section $S = ab$, dans le mode TE_{n0}, lorsque le guide est excité à ω est : $< P_{(n0)} >= \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$, soit :

$$< P_{(n0)} >= \frac{E_0^2 bk}{4\,\mu_0\omega} \int_0^a \sin^2(k_{c_n x})\mathrm{d}x$$

$$< P_{(n0)} >= \frac{E_0^2 abk}{4\mu_0\omega}$$

$$< P_{(n0)} >= \frac{E_0^2 S}{4\mu_0 c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{c(n0)}^2}{\omega^2}}.$$

Elle est nulle pour $\omega = \omega_{c_{n0}}$.

Dans le mode fondamental, pour le guide excité à longueur d'onde dans le vide λ_0, la puissance est :

$$< P_{(10)} > (\lambda_0) = \frac{E_0^2 S}{4\mu_0 c}\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}}$$

où $S = ab$ et $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$.

Elle ne dépend pas de z car on a négligé l'atténuation : on assimile le milieu intérieur au vide, le métal des parois est supposé parfait. En pratique, les parois sont en aluminium plaqué or. L'or, excellent conducteur, minimise les pertes par effet Joule des courants induits dans la peau de paroi. La limite du champ disruptif de l'air : $E_0 < E_m = 3.6 \times 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ limite la puissance :

$< P_{(10)} > \lessapprox 10\,\mathrm{MW}$ (ainsi que l'effet Joule dans les parois).

b) Animés de la vitesse v_ε, les photons traversant la section située en z en $\mathrm{d}t$ sont dans $z \in [z - v_\varepsilon \mathrm{d}t, z]$. L'énergie renfermée par cet intervalle se calcule de deux façons : $\mathrm{d}\mathscr{E} = u_l \mathrm{d}t =< P >_T\,\mathrm{d}t$ soit :

$$\frac{\varepsilon_0\, a\, b\, E_0^2}{4} v_\varepsilon = \frac{E_0^2\, abk}{4\mu_0\omega} \quad \text{d'où :}$$

$$v_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon_0\,\mu_0\,\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g\,.$$

Ici, vitesse de groupe et vitesse de propagation de l'énergie sont les mêmes. Si la propagation était très dispersive, ce ne serait pas automatique.

4) a) Ce sont les relations de discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$ intérieur /paroi : $\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$. La vision surfacique est d'essence macroscopique. Au niveau mésoscopique, charges et courants sont répartis en volume.

b) Avec $\Psi = \omega t - kz$, on a :

$< \cos(\Psi)\sin(\Psi) >= 0$,

$< \cos^2\Psi >=< \sin^2\Psi >= 1/2$.

Ainsi, calcule-t-on en $x = 0$:

$$< \overrightarrow{\mathrm{d}F}_1 >= P_1\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_x$$

$$< \overrightarrow{\mathrm{d}F}_1 >= \frac{-1}{\mu_0}\left[\frac{E_0 n\pi}{2a\omega}\right]^2 \mathrm{d}S\vec{e}_x\,.$$

Avec $A = \dfrac{E_0^2}{4\mu_0\omega^2}$, on a en $y = 0$:

$$< \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}_2}{\mathrm{d}S\vec{e}_y} >= -P_2 = A\left[k_{c_n}^2 \cos^2[k_{c_n}x] - k^2\sin^2[k_{c_n}x]\right]$$

soit, avec la (RD) :

$$P_2 = A\left[-\left[\frac{\omega}{c}\right]^2\cos^2(k_{c_n}x) + k^2\right].$$

À la fréquence $5.5\,\mathrm{GHz}$, la puissance véhiculée est :

$$< P_{(10)} >= \frac{E_0^2 ab}{4\mu_0 c}[1 - \frac{c^2}{4a^2 f^2}]^{1/2}.$$

Donc :

$P = 10\,\mathrm{W}$, $E_0 = 7765\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

Avec $n = 1$, $f = 5.5\,\mathrm{GHz}$, la pression est $P_1 = \dfrac{E_0^2\pi^2}{4a^2\omega^2\mu_0}$

$P_1 = 1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa}$.

5) a) Moins élargies par dispersion, les impulsions véhiculées restent disjointes.

b) La bande de fréquence doit être au-dessus de la fréquence fondamentale et sous la fréquence propre de rang 2 :

$\dfrac{c}{2\,a} < 4 \times 10^9$ et $6 \times 10^9 < \dfrac{c}{a}$ soit : $a \in [33\,\mathrm{mm}\,;\,50\,\mathrm{mm}]$.

6) Le mode $TE_{n,m}$ de relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left[\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}\right]$, se propage si

$\omega > \omega_{c_{(n,m)}} = c\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$. Les plus faibles fréquences propagées sont $f_{c_{(10)}} = \frac{c}{2\,a}$, $f_{c_{(20)}} = \frac{c}{a}$, $f_{c_{(01)}} = \frac{c}{2\,b}$, $f_{c_{(02)}} = \frac{c}{b}$, $f_{c_{11}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. Le guide est monomode si on l'excite à une fréquence f laissant une seule de ces fréquences se propager. Si $b < a$, il l'est pour :
$f_{c_{(10)}} < f < \min\left[f_{c_{(20)}}, f_{c_{(02)}}, f_{c_{01}}, f_{c_{11}}\right]$.