

Outils de représentation des signaux : transformée de Fourier

Ce complément de cours est ne comprend que très peu de notions exigibles (elles sont signalées par un ♥) : le but est de savoir utiliser ces notions.

1 Généralités

Pour étudier les propriétés d'un signal, on utilise deux représentations différentes :

1. l'une dans l'espace des temps, fournie par la fonction $x(t)$,
2. l'autre dans l'espace des fréquences, fournie par une fonction $X(f)$ appelée « spectre ».

Le passage de l'une à l'autre se fait par l'intermédiaire de la décomposition en série discrète de Fourier pour un signal $x(t)$ périodique, ou par la transformée de Fourier dans le cas général d'un signal $x(t)$ non périodique.

2 Spectre fourni par la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

Si $x(t)$ est une fonction T-périodique, alors $x(t)$ s'écrit sous l'une des décompositions en série de Fourier suivantes :

2.0.1 Série sur les cosinus et les sinus, à coefficients réels et à fréquences positives

Série de Fourier ♥

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right] \text{ où } [a_n; b_n] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Avec :

$$X_0 = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt$$

X_0 est la valeur moyenne de $x(t)$ et a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de $x(t)$.

2.1 Série sur les exponentielles complexes, à coefficients complexes et à fréquences positives et négatives

Série de Fourier ♥

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \exp \frac{i2\pi nt}{T} \text{ où } \underline{c}_n \in \mathbb{C}$$

Avec :

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp \frac{i2\pi nt}{T} dt$$

□ On peut faire facilement le lien entre les deux décompositions :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \exp \frac{i2\pi nt}{T} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \underline{c}_n \exp \frac{i2\pi nt}{T} + \underline{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n \exp \frac{i2\pi nt}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_{-n} \exp \frac{-i2\pi nt}{T} + \underline{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n \exp \frac{i2\pi nt}{T}$$

$$x(t) = \underline{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underline{c}_n \exp \frac{i2\pi nt}{T} + \underline{c}_{-n} \exp \frac{-i2\pi nt}{T} \right]$$

$$x(t) = \underline{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\underline{c}_n + \underline{c}_{-n}) \cos \frac{i2\pi nt}{T} + (i\underline{c}_n - i\underline{c}_{-n}) \sin \frac{i2\pi nt}{T} \right]$$

et donc :

$$\underline{c}_0 = X_0$$

$$\underline{c}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$\underline{c}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

□ Quelques résultats :

- La fonction $x(t)$ étant en général une fonction réelle, on a alors :

$$\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^*$$

- L'histogramme des modules $|\underline{c}_n|$ en fonction de la fréquence est le spectre en amplitude de $x(t)$.
- Celui des phases $\arg(\underline{c}_n)$ en fonction de la fréquence est le spectre en phase de $x(t)$.

2.2 Série sur les exponentielles complexes à coefficients d'amplitude et de phase réels et à fréquences positives et négatives ♥

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp i \left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n \right) \text{ où } : [A_n, \phi_n] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Avec :

$$A_n = |c_n|$$

$$\phi_n = \arg(c_n)$$

La figure (1), représente le spectre d'une fonction $x(t)$ T -périodique quelconque.

- Les fréquences $f_n = n/T$ contenues dans $x(t)$, sont proportionnelles à la fréquence fondamentale $f = 1/T$ obtenue pour $n = 1$.
- La composante obtenue pour $n > 1$ est la fréquence harmonique de rang n .

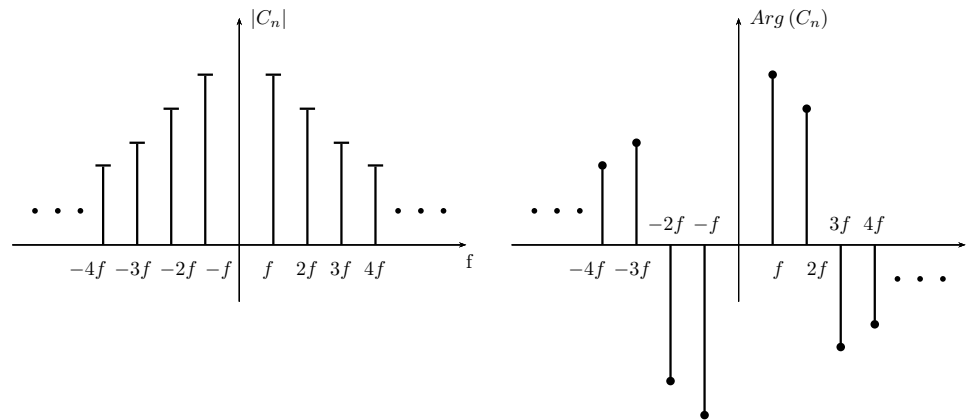


Figure 1 – Spectre d'amplitude et de phase (discret) d'un signal périodique quelconque

3 Spectre fourni par la transformée de Fourier d'un signal quelconque

3.1 Définition

Transformée de Fourier ♥

La transformée de Fourier (TF) généralise la série de Fourier aux signaux non périodiques. La transformée de Fourier de $x(t)$ est une fonction $X(f)$ qui le représente spectralement et lui est liée par les relations réciproques suivantes :

$$X(f) = TF(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi ft) x(t) dt$$

$$x(t) = TF^{-1}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi ft) X(f) df$$

- La représentation du module $|X(f)|$ est le spectre en module de $x(t)$.
- Celle de l'argument $\arg(X(f))$ est son spectre en phase.
- Si $x(t) \in \mathbb{R}$, alors : $X(-f) = X^*(f)$, d'où : $|X(-f)| = |X(f)|$ et $\arg(X(-f)) = -\arg(X(f))$.

Exemple de spectre continu :

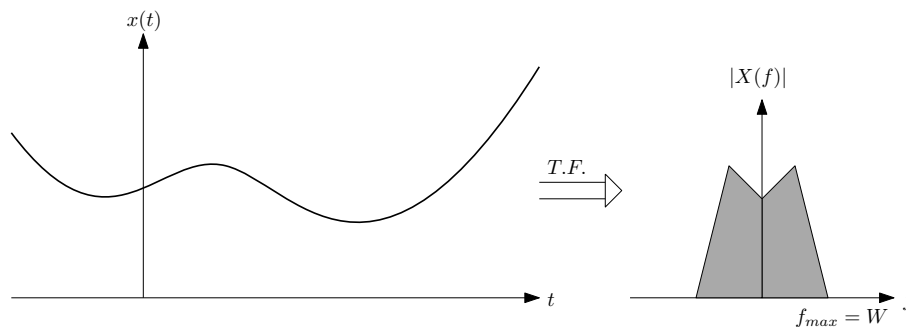


Figure 2 – Spectre de $x(t)$

3.2 Pic de Dirac et peigne de Dirac

1. La distribution de Dirac

Schématisée en figure (3), cette distribution notée δ est définie par :

Pic de Dirac

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ pour } t \neq 0 \\ \delta(t) &= 1 \text{ pour } t = 0 \end{aligned}$$

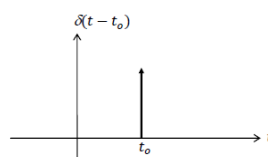


Figure 3 – Distribution de Dirac

2. Le peigne de Dirac de période T_e

Schématisée en figure (4), cette distribution notée $\Pi(T_e)$ est définie par la donnée de sa période temporelle T_e et par la formule :

Peigne de Dirac

$$\Pi(T_e)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \times T_e)$$

où T_e est la période et où $k \in \mathbb{Z}$

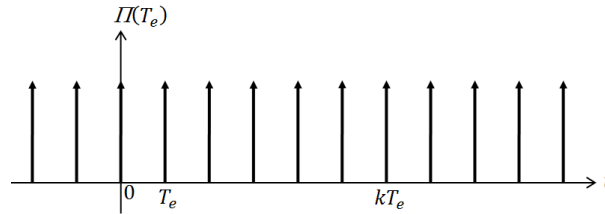


Figure 4 – Peigne de Dirac de période T_e

3.3 Produit de convolution et TF

- Le produit de convolution (noté $\otimes$) de la fonction $x(t)$ par la distribution δ centrée en t_0 est :

$$x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Seuls les produits de convolution avec le pic de Dirac ($\delta(t)$) ou avec le peigne de Dirac ($\Pi_T(t)$) seront envisagés.

- Si f et g sont deux fonctions-distributions de la variable t , et si h est leur produit de convolution :

$$h(t) = f(t) \otimes g(t)$$

alors, leurs TF se multiplient :

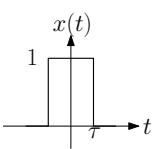
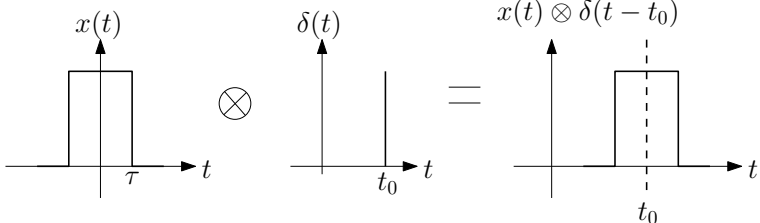
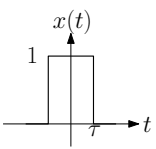
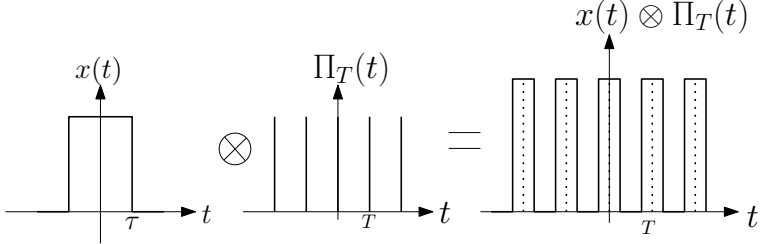
$$H(f) = F(f) \times G(f)$$

- Si f et g sont deux fonctions-distributions de la variable t , et si h est leur produit :

$$h(t) = f(t) \times g(t)$$

alors, leurs TF sont convoluées :

$$H(f) = F(f) \otimes G(f)$$

Signal $x(t)$	Produit de convolution
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$x(t) \otimes \delta(t - t_0)$
 Figure 5	 Figure 6
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$x(t) \otimes \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$
 Figure 7	 Figure 8

3.4 Cas particuliers importants

- Si $x(t)$ est un pic de Dirac : $x(t) = \delta(t)$, alors sa TF est la fonction $X(f) = 1$.

La transformée d'un pic de Dirac est un bruit blanc parfait

- Si $\Pi(T_e)$ est le peigne de Dirac de période T_e , alors sa TF est le peigne de Dirac :

$$F(\Pi(T_e))(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \times f_e) \text{ où : } f_e = 1/T_e$$

La transformée d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac

- Si $x(t)$ est une fonction gaussienne de la forme :

$$x(t) = \exp(-\alpha t^2)$$

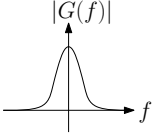
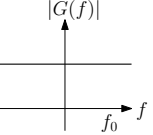
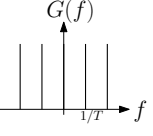
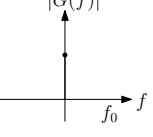
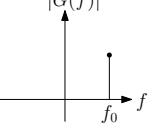
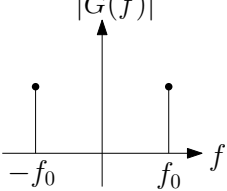
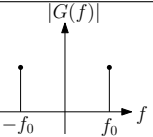
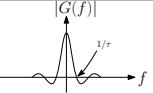
Alors sa TF est la fonction gaussienne suivante :

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}\right)$$

La transformée d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac

3.5 Tableau des principales $T.F$

:

Signal $g(t)$	Transformée de Fourier $G(f)$	spectre d'amplitude
$\exp(-\alpha t^2) (\alpha > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha})$	 Figure 9
$\delta(t)$	1	 Figure 10
$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$	 Figure 11
1	$\delta(f)$	 Figure 12
$\exp(i2\pi f_o t)$	$\delta(f - f_o)$	 Figure 13
$\cos(2\pi f_o t)$	$\frac{1}{2} \delta(f - f_o) + \frac{1}{2} \delta(f + f_o)$	 Figure 14
$\sin(2\pi f_o t)$	$\frac{1}{2} \delta(f - f_o) - \frac{1}{2} \delta(f + f_o)$	 Figure 15
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}(\pi \tau f)$	 Figure 16