

CORRIGE TD2 MQ

EFFET PHOTOELECTRIQUE

Exercice 1

Le rayon R de la zone de récupération d'énergie de la part de l'électron est d'environ 10^{-9} m et la surface correspondante est

$$S = \pi R^2 = 3.10^{-18} \text{ m}^2$$

Or, la puissance P_{tot} de la source d'émission isotrope se répartit sur la sphère de rayon $D = 5$ m et de surface

$$S' = 4\pi D^2 \simeq 3.10^2 \text{ m}^2$$

donc la puissance arrivant sur la zone d'excitation de l'électron est, par règle de trois,

$$P = \frac{S}{S'} P_{tot} \simeq 10^{-23} \text{ W}$$

Si toute cette puissance est absorbée par l'électron pour atteindre l'énergie d'extraction W_s , le temps d'excitation est alors de

$$\Delta t = \frac{W_s}{P} \simeq 20 \text{ h}$$

En pratique, on ne constate pas un tel délai dans l'observation de l'effet photoélectrique (les mesures donnent un délai maximum de 3.10^{-9} s, même pour un éclairage peu intense)! C'est très surprenant!

EXPERIENCE DE FRANCK ET HERTZ

Exercice 2

Réponse

1. On a de façon approchée un diviseur de tension, d'où

$$V_G = \frac{x}{R-x} V_0$$

Les résistances réglables servent à faire varier V_G entre 0 et V_0 . On peut réaliser ce dispositif à résistances variables avec un rhéostat ou un potentiomètre.

2. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un électron dans le référentiel galiléen d'étude, entre le filament et la grille, donne accès à

$$v = \sqrt{\frac{2eV_G}{m_e}}$$

3. Avec le même type de démarche, on obtient au niveau de l'électrode sous les hypothèses données

$$v' = \sqrt{\frac{2e(V_G - \varepsilon)}{m_e}}$$

4. Interprétation de la courbe $I = f(V_G)$...

- a. Tant que V_G reste faible, le courant I augmente régulièrement. Cette portion de courbe est analogue à la courbe caractéristique d'une diode et s'explique de la même manière à partir de la charge d'espace formée par les électrons émis par le filament chauffé et accumulés dans son voisinage : l'augmentation du courant I traduit la diminution progressive de cette charge d'espace au fur et à mesure que les électrons sont attirés plus notablement par la grille.
- b. Lorsque la tension V_G dépasse un certain seuil V_r , on observe une diminution brutale du courant I qui indique l'apparition d'un nouveau phénomène : la majeure partie des électrons qui atteignaient précédemment l'électrode collectrice se trouve maintenant arrêtée en cours de route. On explique ceci par des collisions inélastiques au cours desquelles les électrons cèdent aux atomes la totalité de leur énergie cinétique $\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_r$. Pour expliquer le changement d'allure brutal de la courbe, il faut aussi supposer qu'en-dessous de la tension-seuil V_r se produisent seulement des collisions élastiques.
- c. Lorsque la tension dépasse sensiblement la valeur V_r , le courant I recommence à croître. Ceci s'explique parfaitement si l'on admet que les électrons continuent à céder aux atomes, dans les collisions inélastiques, la même énergie eV_r . Ils gardent alors une partie de leur énergie cinétique et restent capable d'atteindre l'électrode collectrice avec une vitesse réduite.

On observe ensuite à nouveau une diminution brutale du courant I lorsque la tension V_G atteint $2V_r$, c'est-à-dire lorsque les électrons se trouvent en majeure partie arrêtés. En effet, ceux-ci peuvent perdre la totalité de leur énergie cinétique $\frac{1}{2}m_e v^2 = 2eV_r$ s'ils effectuent successivement deux collisions inélastiques sur deux atomes différents.

La répétition du phénomène pour $3V_r, 4V_r \dots$ s'explique de la même façon en augmentant le nombre de chocs inélastiques unité par unité.

6. À la lumière de ce qui précède, $W_r = eV_r$

7. Accord avec le modèle de Bohr...

- a. L'énergie W_r communiquée à l'atome dans l'expérience est bien inférieure à l'énergie d'ionisation $W_i = 10,5 \text{ eV}$. On en déduit que l'on observe un phénomène autre que l'ionisation dans lequel l'atome conserve son intégrité : il passe d'un état normal (fondamental d'énergie E_1) à un état excité d'énergie $E_2 = E_1 + W_r$.
- b. La longueur d'onde λ_r est dans le domaine **ultraviolet**. L'émission de cette lumière est cohérente avec le modèle de Bohr dans le sens où un atome de mercure excité peut ensuite se désexciter en produisant une lumière de longueur d'onde λ telle que

$$\frac{hc}{\lambda} = W_r = e V_r$$

On trouve ainsi bien

$$\lambda = 2,5 \cdot 10^2 \text{ nm} \simeq \lambda_r$$

- c. Les transferts énergétiques se font par multiples entiers de W_r , ce qui confirme l'existence d'une quantification des niveaux d'énergie occupés par les électrons dans l'atome.

SONDER UN CRISTAL AVEC DES ONDES DE MATIERE ?

Exercice 3

1. Pour un grain de poussière (non relativiste), la longueur d'onde de de Broglie est

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ nm} = 0,7 \text{ fm}$$

Il est impossible de trouver un solide cristallin permettant d'obtenir un phénomène de diffraction observable avec de tels grains de poussière : on ne peut pas avoir de paramètre de maille de l'ordre d'une telle longueur d'onde de de Broglie (inférieure à la taille d'un nucléon !).

2. Si la vitesse initiale d'un électron est négligeable devant sa vitesse après accélération, le théorème de l'énergie cinétique fournit leur énergie cinétique

$$E_c = \frac{p^2}{2 m_e} = e V$$

soit

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_c}} \simeq \frac{1,23}{\sqrt{V}} \quad (\text{en nm pour } V \text{ en V})$$

En prenant V de l'ordre de 10^2 V , la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre

de 0,1 nm, valeur typique du paramètre de maille des solides cristallins : on peut bien révéler par ce biais, a priori, l'aspect ondulatoire éventuel des électrons !

Notons que l'on n'a pas intérêt à prendre les électrons relativistes sinon la longueur d'onde de de Broglie devient trop faible... Plus les électrons sont lents, plus leur aspect ondulatoire est révélabile (mais il n'est pas forcément simple d'avoir des vitesses très faibles pour autant en raison de l'agitation thermique).

Pour culture, les électrons atteignent une vitesse $c/10$ lorsque $V = 2,6 \cdot 10^3$ V.

EXPERIENCE DE DAVISSON ET GERMER

Exercice 4

1. Analyse de la formule de Bragg (ce n'est qu'une démonstration par condition suffisante mais pas nécessaire sinon c'est trop technique ; cela fait appel à la notion de réseau réciproque).

a. En notant \vec{k}_i (resp. \vec{k}) le vecteur d'onde incident (resp. émergent) et A et B deux atomes quelconques d'un plan réticulaire donné, le déphasage entre les ondes émergentes à l'infini est

$$\Delta\varphi = (\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{AB}$$

Dans le cas de la réflexion spéculaire, ce déphasage est nul et **on a des interférences constructives entre les divers rayons réfléchis pour un plan réticulaire donné** : le rayonnement obtenu est particulièrement intense (pour toute disposition des atomes dans le plan, même non régulière!).

b. On se place, compte tenu de la question précédente, dans le cadre de la réflexion spéculaire sur chaque atome et on considère plusieurs plans réticulaires. On conserve des interférences constructives pour les rayons issus d'un même plan réticulaire.

Pour avoir des interférences constructives pour l'ensemble des plans réticulaires, on doit avoir le déphasage associé à deux atomes A et B de deux plans réticulaires consécutifs multiple entier de 2π . Autrement dit,

$$(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{AB} = 2\pi n \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

En exploitant la spécularité, il vient

$$2k_i d \sin \phi = 2\pi n$$

et on déduit bien la formule de Bragg compte tenu de $k_i = 2\pi/\lambda$.

2. Analyse de l'expérience de Davisson et Germer.

a. Force est de constater que pour $\theta = 50^\circ$,

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

donc la formule de Bragg donne

$$\lambda_{\text{eq},n} = \frac{2d}{n} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{0,16(5)}{n} \text{ nm}$$

Le dernier chiffre a été mis entre parenthèses car on manque de précisions sur les mesures pour en être certain (néanmoins, il est intéressant, pour des raisons historiques, de le spécifier ; idem pour λ_{DB} ensuite).

b. Le faisceau électronique est accéléré sous $V = 54 \text{ V}$ donc

$$\lambda_{\text{DB}} \simeq \frac{1,23}{\sqrt{V}} = 0,16(7) \text{ nm}$$

Il est manifeste que $\lambda_{\text{eq},1}$ et λ_{DB} sont très proches et ce résultat associé à d'autres permet de valider le concept des ondes de matière de de Broglie (typiquement en relevant d'autres maxima d'intensité pour plusieurs ordres pour diverses valeurs de V).

MARCHE DE POTENTIEL

Exercice 5

1. Pour un quanton matériel non relativiste, recherchons les états stationnaires qui sont solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \varphi(x) = 0$$

Comme $E - V(x) > 0$ et que $V(x)$ est constante par morceaux, il vient la forme des solutions générales

$$\varphi(x < 0) = A_1 e^{i k_1 x} + A'_1 e^{-i k_1 x} \quad \text{et} \quad \varphi(x > 0) = A_2 e^{i k_2 x} + A'_2 e^{-i k_2 x}$$

avec

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} \quad \text{et} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}$$

De plus, il y a continuité de φ en $x = 0$, ainsi que de sa dérivée première (énergie potentielle bornée), donc

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 \quad \text{et} \quad i k_1 (A_1 - A'_1) = i k_2 (A_2 - A'_2)$$

Il manque pour le moment ici deux équations pour déterminer les quatre constantes d'intégration. Or, l'énoncé dit que le quanton vient de

$x \rightarrow -\infty$. Autrement dit, on peut prendre

$$A'_2 = 0$$

car l'onde d'amplitude de probabilité correspondante évolue dans le domaine des $x > 0$ dans le sens des x décroissants. Par résolution élémentaire, il vient

$$\boxed{\varphi(x \leq 0) = A_1 e^{i k_1 x} + r A_1 e^{-i k_1 x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(x \geq 0) = \tau A_1 e^{i k_2 x}}$$

avec

$$\boxed{r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{2 k_1}{k_1 + k_2}}$$

La constante A_1 est fixée par le choix du paquet d'ondes complet décrivant le quanton réel localisé et en pensant à la normalisation de la fonction d'onde.

2. On peut « visualiser » le résultat précédent comme suit : une onde incidente $A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)}$ avec $\omega = E/\hbar$ est **partiellement réfléchi**e en $x = 0$ et **partiellement transmise** et les coefficients r et τ caractérisent les modifications d'amplitudes correspondantes. La fonction d'onde oscille plus vite là où l'énergie cinétique $E - V(x)$ est plus grande.

Comme l'interprétation de la fonction d'onde est probabiliste, on peut mieux se fixer les idées en raisonnant à partir d'un flux de quantons identiques indépendants incidents (interprétation statistique) : on pourra mesurer des quantons transmis mais aussi des quantons réfléchis, pas du tout prévus par la physique classique de la question précédente !

3. La densité de probabilité de présence est le carré du module de la fonction d'onde, donc ici de la fonction d'onde spatiale (état stationnaire) :

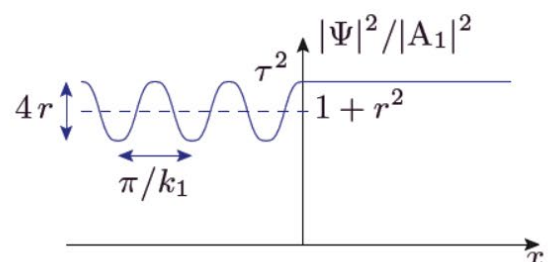
$$\boxed{|\varphi(x \leq 0)|^2 = |A_1|^2 (1 + r^2 + 2 r \cos(2 k_1 x))}$$

et

$$\boxed{|\varphi(x \geq 0)|^2 = \tau^2 |A_1|^2}$$

On en déduit la représentation (voir figure suivante) de la densité de probabilité de présence (indépendante du temps et divisée par $|A_1|^2$). On peut produire les commentaires suivants :

- Il existe toujours une probabilité de trouver un quanton dans le domaine $x < 0$, contrairement au cas de la physique classique, avec une densité de probabilité de présence oscillant sinusoidalement (**interférences quantiques** d'interfrange $\lambda_1/2$ où λ_1 est la longueur d'onde de de



Broglie de incidente...).

- C'est lorsque $E \gg V_0$, que k_2 rejoint par valeurs inférieures k_1 donc $\tau \rightarrow 1$ et $r \rightarrow 0$ et c'est le cas limite de **transmission quasi-totale** : la densité de probabilité de présence tend vers une valeur uniforme pour $x \in \mathbb{R}$, ce qui est logique puisque le quanton ne perçoit plus de changement d'énergie potentielle.
- Lorsque E est très proche de V_0 (par valeurs supérieures), k_2 tend vers zéro donc $r \rightarrow 1$ et $\tau \rightarrow 2$: c'est un cas très particulier où les oscillations dans la partie $x < 0$ donnent accès à des points de probabilité de présence nulle (espacés de π/k_1) ! Déroutant non, d'un point de vue particulière classique ?

Exercice 6

On mène l'étude en physique classique. Le système de la particule est conservatif : E est constante et vaut la somme de l'énergie potentielle $V(x)$ et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v(x)^2$. Par conséquent, la particule ne peut être présente que dans le domaine $x < 0$ où la valeur de sa vitesse est

$$v(x < 0) = \sqrt{\frac{2}{m} E}$$

La particule subit une réflexion totale due au choc en $x = 0$ car son énergie mécanique initiale n'est pas suffisante pour qu'elle puisse poursuivre du côté $x > 0$!

Exercice 7

1. Pour un quanton matériel non relativiste, recherchons les états stationnaires qui sont solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \varphi(x) = 0$$

Comme $E - V(x < 0) > 0$ et $E - V(x > 0) < 0$ et que $V(x)$ est constante par morceaux, il vient la forme des solutions générales

$$\varphi(x < 0) = A_1 e^{i k_1 x} + A'_1 e^{-i k_1 x} \quad \text{et} \quad \varphi(x > 0) = B_2 e^{\mu_2 x} + B'_2 e^{-\mu_2 x}$$

avec $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$ et $\mu_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$

On a forcément B_2 nulle pour avoir la fonction d'onde bornée pour $x \rightarrow \infty$ et c'est à ce point que l'on constate que la situation est formellement analogue au cas $E > V_0$ en remplaçant k_2 par $i \mu_2$ (attention à ne pas se tromper de signe !). Ainsi,

$$\boxed{\varphi(x \leq 0) = A_1 e^{i k_1 x} + r A_1 e^{-i k_1 x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(x \geq 0) = \tau A_1 e^{-\mu_2 x}}$$

avec

$$\boxed{r = \frac{k_1 - i \mu_2}{k_1 + i \mu_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{2 k_1}{k_1 + i \mu_2}}$$

La constante A_1 est fixée par le choix du paquet d'ondes complet décrivant le quanton réel localisé et en pensant à la normalisation de la fonction d'onde.

Cette fois-ci, par rapport au cas $E > V_0$, les coefficients de réflexion et de transmission sont complexes. . .

2. On voit que l'onde incidente $A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)}$ avec $\omega = E/\hbar$, représentant l'amplitude de probabilité associée à flux incident de quantons identiques indépendants d'impulsion parfaitement déterminée, conduit à une onde réfléchi. Celle-ci a son amplitude modifiée par le facteur r dont les module et argument sont

$$\boxed{|r| = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta = -2 \operatorname{Arctan} \frac{\mu_2}{k_1} = -2 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{V_0}{E} - 1}}$$

De plus, par analogie avec ce qui a été fait pour le cas $E > V_0$, on a directement

$$\boxed{R = 1}$$

Cela explique que l'on parle dans ce cas d'une situation de réflexion totale, cette réflexion se faisant avec un certain déphasage θ non nul pour l'onde réfléchi : il y a une probabilité certaine qu'un quanton incident soit réfléchi par la marche de potentiel.

Toutefois, cela ne signifie pas pour autant que la situation est analogue au cas classique de la première question dans le domaine $x < 0$! En effet, si on calcule la densité de probabilité de présence, il vient

$$\boxed{|\Psi(x \leq 0, t)|^2 = 2 |A_1|^2 [1 + \cos(2 k_1 x - \theta)]}$$

et on observe des **interférences quantiques d'interfrange** $\pi/k_1 = \lambda_1/2$ (λ_1 longueur d'onde de de Broglie de l'onde incidente). Cela est différent de la première question et se rapproche plus d'une analyse ondulatoire (voir analogie optique ensuite) ! La représentation de $|\Psi|^2/|A_1|^2$ est donnée sur la figure fournie dans la question suivante, pour la zone $x > 0$. . .

3. On constate que l'onde incidente **donne naissance dans le domaine $x > 0$ à une onde évanescente** $\tau A_1 e^{-\mu_2 x} e^{i \omega t}$ (déjà définie en physique des ondes : c'est une onde stationnaire atténuée). **C'est encore la traduction d'un phé-**

nomène quantique, celui-ci étendant l'espace accessible du quanton par rapport au cas classique où celui-ci n'est que l'espace $x < 0$.

On peut même introduire une distance caractéristique de pénétration par évanescente sous la marche :

$$\delta \simeq \frac{1}{\mu_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

De plus, puisqu'on sait déjà qu'il y a réflexion totale avec $R = 1$, il vient le coefficient de probabilité de transmission

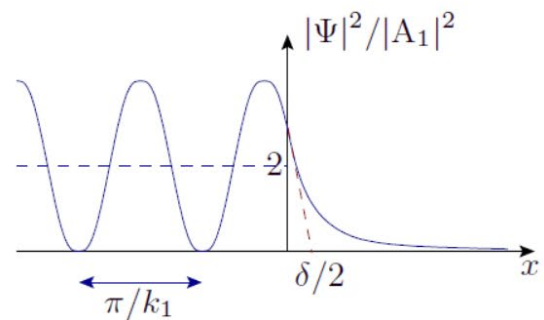
$$T = 1 - R = 0$$

Il est donc impossible de transmettre un quanton (sans que cela ne soit en contradiction avec la distance de pénétration car il y a évanescente)... On pourrait d'ailleurs vérifier, grâce à l'expression générale de \vec{J} vue en annexe page 22, que $\vec{J}_t = \vec{0}$. Cela peut paraître surprenant vu que la probabilité de mesurer la position d'un quanton est non nulle dans le domaine $x > 0$ par évanescente, mais on peut imaginer qu'il y a une compensation entre deux courants de probabilité opposés (un en sens direct, l'autre en sens indirect puisque après un demi-tour).

La densité de probabilité de présence est, pour $x \geq 0$,

$$|\Psi(x \geq 0, t)|^2 = |A_1|^2 |\tau|^2 e^{-2\mu_2 x}$$

et il y a continuité de celle-ci en $x = 0$, ainsi que de sa dérivée. La représentation pour tout l'espace est donnée sur la figure. On peut produire les commentaires suivants sur celle-ci :



- Il existe des lieux de probabilité de présence d'un quanton nulle dans le domaine $x < 0$, contrairement au cas de la physique classique, avec une densité de probabilité de présence oscillant sinusoidalement (**interférences quantiques** déjà signalées).
- Plus on réduit \hbar (par la pensée) ou plus on augmente la masse m ou $V_0 - E$ (marche « haute »), moins l'évanescente est perceptible ($\delta \rightarrow 0$) et on retrouve un cas classique pour $x > 0$.

4. Il est possible d'avoir un quanton incident qui pénètre dans la marche de potentiel lors de sa réflexion, ce qui explique le déphasage de l'onde réfléchi par rapport à l'onde incidente en $x = 0$ (argument θ de r). **Cela peut entraîner une prise de retard à la réflexion** (pour l'interprétation statistique).

Exercice 8

1. On a obtenu antérieurement les résultats

$$\varphi(x \leq 0) = A_1 e^{i k_1 x} + r A_1 e^{-i k_1 x} \quad \text{et} \quad \varphi(x \geq 0) = \tau A_1 e^{i k_2 x}$$

avec
$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2 k_1}{k_1 + k_2}$$

Pour chaque onde, on calcule la projection sur \vec{e}_x du vecteur densité de courant de probabilité (qui est une constante car on a à chaque fois un état stationnaire unidimensionnel) :

$$J_i = |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \quad J_r = -|r A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \quad J_t = |\tau A_2|^2 \frac{\hbar k_2}{m}$$

donc
$$\boxed{R = |r|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{k_2}{k_1} |\tau|^2 = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}}$$

2. On a bien $R = |r|^2$ mais pas $T = |t|^2$ (cette dernière relation est forcément grossièrement fautive en raison du changement d'énergie potentielle qui induit un changement d'énergie cinétique, donc de vitesse)...

3. On constate rapidement que

$$\boxed{R + T = 1}$$

Cela veut dire que si l'on impose un flux de quantons incidents identiques indépendants, celui-ci se partage en un flux réfléchi et un flux transmis et il y a respect de la conservation du nombre de quantons (pas de perte!).

On peut aussi interpréter la chose avec un seul quanton incident sur la marche de potentiel : on sait qu'il est soit réfléchi, soit transmis et la somme des probabilités de ces événements vaut 1.

Il est cohérent de qualifier R et T de coefficients de probabilité de réflexion et de transmission.

4. La fonction $R(\xi)$, en posant $\xi = k_2/k_1$ qui est compris entre 0 et 1, est décroissante de 1 à 0. Plus E s'éloigne de V_0 par valeurs supérieures, moins la probabilité de réflexion est importante. C'est cohérent avec les résultats mis en évidence antérieurement.

Exercice 9

Pour estimer le coefficient de probabilité de réflexion R , on approxime le changement d'énergie potentielle du quanton d'énergie initiale $E = E_c = 5$ MeV par celui d'une marche de potentiel descendant de 0 à $V'_0 = -50$ MeV. Par le théorème de réciprocité et puisque l'on peut choisir le zéro d'énergie à notre guise (cela ne change pas les densités de probabilité), on peut considérer plutôt la situation d'un quanton d'énergie $E' = 55$ MeV arrivant sur une marche de potentiel montante passant de 0 à $V_0 = -V'_0 = 50$ MeV, ce qui nous place exactement dans la même situation que celle étudiée précédemment. Alors,

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E'}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E'}} \right)^2 = 29\%$$

Les neutrons ont une probabilité plus grande de rentrer dans le noyau et d'éventuellement pouvoir y induire une fission que d'être réfléchi mais cette probabilité de réflexion est loin d'être négligeable !

On peut réaliser diverses observations :

- La **trajectoire classique** est visuellement cohérente avec la **position moyenne** (en terme de probabilité de présence !) du quanton incident puis transmis (en dehors des instants où le paquet d'ondes est déformé par le franchissement de la marche).
- Il y a un **ralentissement** du déplacement entre avant et après la marche (ce qui est cohérent avec la théorie car l'énergie cinétique est réduite par l'augmentation de l'énergie potentielle à énergie totale fixée).
- Un quanton **peut-être réfléchi** par la marche et, dans ce cas, il se déplace avec une **position moyenne** respectant la **trajectoire classique** après rebond (ce rebond n'étant pas prévisible par la mécanique classique !).
- Après transmission, on observe un léger **étalement du paquet d'ondes** (possible car il y a dispersion...). Le même phénomène existe aussi pour le paquet d'ondes réfléchi mais est ici peu visible.
- Le paquet d'ondes, « dans la zone de la marche de potentiel » présente de **fortes oscillations** qui correspondent à des **interférences quantiques** (entre ondes incidentes et réfléchies).

Exercice 10

1. Pour la poussière considérée,

$$V_0 - E = 2 \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2$$

donc

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2 m (V_0 - E)}} = \frac{\hbar}{m v} = \frac{\lambda_{\text{DB}}}{2\pi} \simeq 10^{-16} \text{ m}$$

Une telle distance est inférieure à la taille du noyau atomique donc la pénétration sous la marche n'est pas à considérer...

2. On peut grossièrement considérer que l'électron de conduction se dirigeant vers la surface du bloc de cuivre pour en sortir voit une marche de potentiel de valeur d'énergie V_0 . Bien sûr, sans l'effet photoélectrique et en conditions usuelles, l'énergie E de l'électron est inférieure à V_0 et on peut estimer $V_0 - E$ sachant que cela doit correspondre à l'énergie lumineuse seuil de l'effet photoélectrique :

$$V_0 - E = \frac{h c}{\lambda_s}$$

donc

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2 m (V_0 - E)}} = \sqrt{\frac{h \lambda_s}{8 \pi^2 m c}} \simeq 10^{-10} \text{ m}$$

On constate que cela est moins négligeable que pour le cas précédent puisqu'il s'agit d'une distance atomique et on peut avoir des conséquences mesurables...

PUITS DE POTENTIEL**Exercice 11**

1. Pour un quanton matériel non relativiste, recherchons les états stationnaires d'énergie E qui sont solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) + \frac{2 m}{\hbar^2} [E - V(x)] \varphi(x) = 0$$

L'espace accessible est $x \in [0; L]$ où l'énergie potentielle est nulle, donc, en ne raisonnant que sur cet espace,

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) + \frac{2 m}{\hbar^2} E \varphi(x) = 0$$

Les cas $E < 0$ et $E = 0$ conduisent à des fonctions d'onde nulles en raison des conditions aux limites $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(L) = 0$ imposées par les murs de potentiel in-

fini. Les états stationnaires possibles ont donc forcément une énergie E strictement positive (alors qu'en physique classique, on imagine très bien la particule à l'arrêt...) : on retrouve une propriété d'énergie minimale rencontrée dans le second chapitre (cf énergie de confinement).

Pour $E > 0$, on peut écrire les solutions sous la forme

$$\varphi(x) = A \sin kx + A' \cos kx \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Or, $\varphi(0) = 0$ impose $A' = 0$ et $\varphi(L) = 0$ fournit ensuite, si l'on ne veut pas une fonction d'onde nulle,

$$\sin kL = 0$$

Par conséquent, les conditions aux limites quantifient la pulsation spatiale k , donc l'énergie E , en posant un entier n non nul :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}$$

Pour le moment, la fonction d'onde spatiale d'un état stationnaire d'énergie E_n est de la forme

$$\varphi_n(x) = A_n \sin k_n x$$

où A_n est un facteur **que l'on peut choisir réel positif sans restriction physique** (puisque l'on utilise cette fonction dans des combinaisons avec des facteurs complexes adaptés ou que l'on se contente de considérer le sens physique associé au carré de son module). La détermination de A_n passe ici par la normalisation de la fonction d'onde **qui est possible donc on a des états liés :**

$$1 = \int_0^L |\varphi(x)|^2 dx = \int_0^L |A_n \sin k_n x|^2 dx = \frac{A_n^2 L}{2}$$

en exploitant la moyenne $1/2$ de la fonction \sin^2 sur un nombre entier de périodes. Finalement, la fonction d'onde spatiale normalisée de l'état stationnaire **lié** d'énergie E_n est

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

2. Pour chaque valeur d'énergie E_n , il n'y a qu'un seul état stationnaire linéairement indépendant : **il n'y a pas dégénérescence du niveau d'énergie.**
3. Commençons par signaler qu'il existe une analogie formelle entre résultats

relatifs au quanton confiné dans le puits unidimensionnel infini et d'autres associés à l'étude des vibrations d'une corde horizontale fixée à ses deux extrémités (aux petites oscillations transverses, polarisées rectilignement, sans pertes énergétiques). Pour mieux la préciser, on peut (doit...) dresser un tableau d'analogies :

Quanton en puits 1D infini	Corde vibrante fixée aux extrémités
Espace accessible $x \in [0; L]$	Abscisses des points de la corde $x \in [0; L]$
Conditions aux limites $\varphi_n(0) = \varphi_n(L) = 0$	Conditions aux limites $y_{esp,n}(0) = y_{esp,n}(L) = 0$
Fonction d'onde spatiale $\varphi_n(x) \propto \sin(n \pi x/L)$	Partie spatiale d'un mode propre $y_{esp,n}(x) \propto \sin(n \pi x/L)$
Pulsation spatiale associée $k_n = n \pi/L$	Pulsation spatiale associée $k_n = n \pi/L$

Les similitudes sont frappantes et, dans les deux cas, c'est l'application des conditions aux limites qui conduit à la règle de quantification. De ce point de vue, la coïncidence n'est pas fortuite...

Néanmoins, il ne faut pas aller plus loin sur cette analogie :

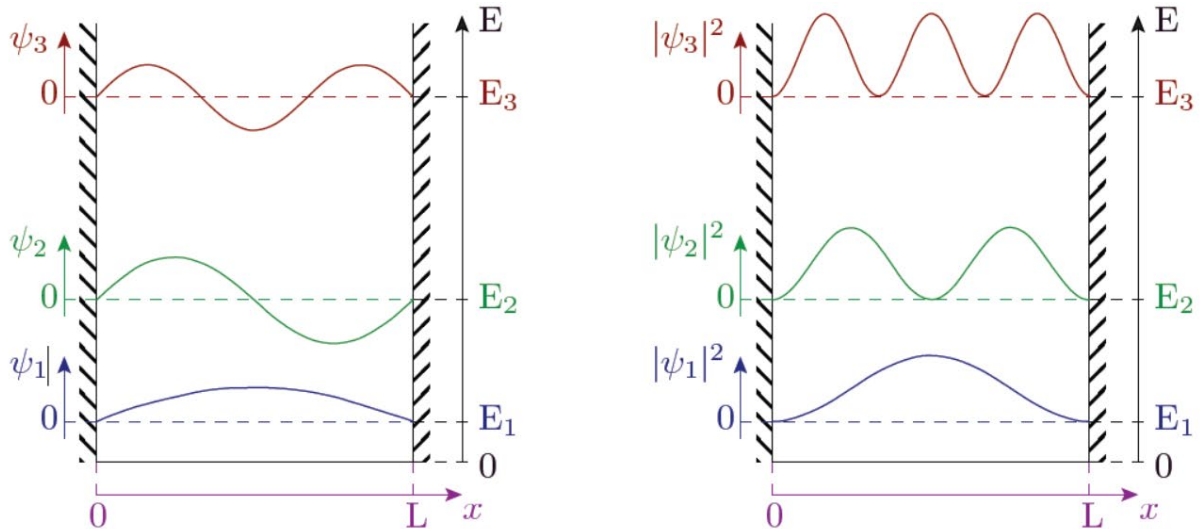
- les équations d'onde de départ ne sont pas les mêmes (l'équation de Schrödinger n'est pas une équation de d'Alembert) ;
- **l'énergie d'un mode propre de la corde n'est pas quantifiée** contrairement au cas quantique ;
- Les pulsations des états propres sont différentes :

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{\hbar k_n^2}{2m} \quad \text{pour le quanton étudié}$$

et $\omega_n = k_n c_0 \quad \text{pour la corde}$

- il existe un caractère dispersif pour le quanton, absent pour la corde ;
- les parties temporelles des amplitudes des ondes s'écrivent différemment ;
- **les interprétations qui découlent des écritures des amplitudes des ondes sont radicalement différentes** (il ne faut pas dire que la particule vibre comme la corde ; on a juste une information en densité de probabilité de présence par le carré du module de la fonction d'onde).

4. Les profils des fonctions d'onde spatiales sont analogues à ceux des modes propres de vibration de la corde et les densités de probabilités associées (indépendantes du temps) en sont les modules au carré. Pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$, on obtient les représentations suivantes :



De plus, pour chaque état stationnaire, **il existe des lieux de probabilité de présence nulle** (nœuds de la fonction d'onde), ce qui n'est pas du tout observé d'un point de vue classique. D'ailleurs, d'un point de vue classique, la densité de probabilité de présence est uniforme sur l'espace accessible, ce qui n'est pas du tout le cas pour les états quantiques !

5. Dans le cas des énergies élevées, c'est-à-dire des nombres quantiques n élevés, la quantification des niveaux d'énergie devient indiscernable car

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \sim \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

On a l'impression d'avoir un **continuum d'énergie comme en physique classique**.

De plus, la fonction d'onde spatiale oscille tellement vite que la probabilité de présence sur un intervalle $[x; x + \delta x]$ tend à s'uniformiser en fonction de x à δx fixé et on tend vers la situation classique.

On retrouve donc le principe de correspondance de Bohr !

Exercice 12

L'énergie la plus basse possible dans le puits étudié, appelée énergie minimale de confinement ou énergie « de point zéro », est

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m L^2}$$

Il s'agit de vérifier que cela est cohérent avec l'inégalité d'Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Or, par le confinement, $\Delta x \leq L$

donc $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta x} \geq \frac{\hbar}{2L}$ avec $\Delta p_x^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2$

Ainsi, $\langle p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4L^2}$

Notons au passage, même si ce n'est pas utile, que $\langle p_x \rangle = 0$ par symétrie du puits... Ensuite, on passe à l'énergie du quanton qui est déterminée pour un état stationnaire réalisé donné :

$$\mathcal{E}_c = \langle \mathcal{E}_c \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8mL^2}$$

et on peut voir que E_1 vérifie cette inégalité.

Exercice 13

1. L'objet considéré est « macroscopique ». L'énergie du niveau fondamental (ou de point zéro) est de l'ordre de

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \simeq 10^{-69} \text{ J} \simeq 10^{-51} \text{ eV}$$

d'où

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} \simeq 10^{-36} \text{ m/s}$$

Une telle vitesse est insignifiante ! Il n'est pas déraisonnable, à notre échelle, de considérer un tel système dans une situation d'arrêt (imaginez le temps qu'il faudrait pour déplacer l'objet de la distance L ; il est très très grand devant l'âge de l'Univers !).

Pour une vitesse $v = 1 \text{ m/s}$, l'énergie cinétique correspond à $n^2 E_1$ pour le modèle du puits considéré, soit

$$n \simeq 10^{35}$$

Une valeur aussi élevée autorise à travailler avec un continuum d'énergies accessibles (sans surprise pour cet objet).

2. L'objet considéré est « microscopique » (cela fait penser à un nucléon dans un

noyau...)). De même que précédemment, on trouve

$$E_1 \simeq 10^{-13} \text{ J} \simeq 1 \text{ MeV}$$

et

$$v_{\min} \simeq 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

ce qui est à la limite relativiste (mais on ne mène ici que des évaluations grossières et ce n'est pas gênant...)).

L'énergie minimale d'excitation est l'écart $E_2 - E_1 = 3 E_1$, soit

$$E_2 - E_1 \simeq 10^{-12} \text{ J} \simeq 10 \text{ MeV}$$

ce qui est bien de l'ordre de grandeur des énergies en jeu lors d'excitations à l'échelle du noyau atomique.

La longueur d'onde λ du rayonnement d'excitation pour effectuer cette transition énergétique est de l'ordre de

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{hc}{3 E_1} \simeq 10^{-13} \text{ m}$$

ce qui correspond à des rayons γ .

Pour information, la température minimale permettant de réaliser la transition par l'agitation thermique est de l'ordre de

$$T \simeq \frac{E_2 - E_1}{k_B} = \frac{3 E_1}{k_B} \simeq 10^{11} \text{ K}$$

ce qui montre que l'agitation thermique ne permet pas d'exciter un tel quanton dans son état fondamental!

Exercice 14

1. Les états stationnaires ont des fonctions d'onde spatiales solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \varphi(x)$$

Pour $0 < E < V_0$ et $x \in [-L/2; L/2]$, on conserve comme pour le puits infini des solutions sinusoïdales. Par contre, on perd les conditions d'annulation de celles-ci en $-L/2$ et $L/2$. En effet, il y a continuité de la fonction d'onde et celle-ci est non

nulle dans les domaines où $|x| \geq L/2$ puisque l'équation différentielle conduit aux fonctions d'onde spatiales à profils exponentiels (elles doivent rester bornées) :

$$\varphi(x \leq -L/2) = A e^{x/\delta} \quad \text{et} \quad \varphi(x \geq L/2) = B e^{-x/\delta}$$

où

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

La longueur δ représente la distance caractéristique de pénétration de l'amplitude de probabilité sous les marches délimitant le puits : on peut imaginer que le puits est élargi, par évanesence, de 2δ (à la « louche »).

La quantification de l'énergie va naître des raccords par continuité nécessaires en $x = 0$ et $x = L$ pour φ et $d\varphi/dx$ (énergie potentielle bornée pour cette dernière) qui donnent quatre relations à imposer entre les deux constantes d'intégration dans le puits et les deux précédentes A et B. Or, toutes ces constantes sont proportionnelles entre elles (si on multiplie φ par un coefficient quelconque α , on conserve une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps) donc on a forcément quantification de l'énergie !

Notons enfin que la situation envisagée donne clairement une fonction d'onde de carré sommable, c'est-à-dire normalisable, donc on a des **états stationnaires liés** (la normalisation permet de fixer le choix de α).

Pour montrer qu'il y a quantification, on peut aussi s'appuyer sur un raisonnement graphique (voir la simulation suggérée avec l'énoncé) exploitant les continuités de φ et $d\varphi/dx$ ainsi que les sens de concavité de $\varphi(x)$ suivant les domaines imposés par l'équation de Schrödinger indépendante du temps (si on isole $d^2\varphi/dx^2$, on voit que son signe est celui de $(E - V)\varphi$)... Ce genre de raisonnement peut bien sûr aussi être mené avec un puits infini !

2. La fonction d'onde spatiale d'un état stationnaire d'énergie $E_n < V_0$ voit un espace accessible plus large que dans le cas du puits infini par évanesence, donc la pulsation spatiale associée pour sa partie sinusoïdale est plus faible et, l'énergie évoluant proportionnellement à p^2 , donc à k^2 par relation de de Broglie, il vient

$$E_n < E_{\infty,n}$$

Les niveaux d'énergie sont abaissés par rapport au cas du puits infini.

3. On peut préciser une **expression implicite approchée** de E_n en imaginant que le puits est élargi de 2δ :

$$E_n \simeq \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(L + 2\delta)^2}$$

L'expression est implicite car δ dépend de E_n (voir la relation de définition de δ). Rien ne sert ici de chercher à isoler E_n .

4. L'énergie de point zéro de l'électron est l'énergie de son niveau fondamental. Par résolution numérique (ou par calculs approchés successifs de δ et E_1 tour à tour), on obtient (en prenant bien en compte m^* au lieu de m)

$$E_1 \simeq 34 \text{ meV}$$

Notons au passage que la valeur correspondante de δ est

$$\delta = 1,5 \text{ nm}$$

5. En utilisant le modèle du puits infini, on trouve

$$E_{\infty,1} = 56 \text{ meV}$$

ce qui est assez éloigné de la valeur précédente, sans surprise, car δ est non négligeable devant L !

Par contre, on se rend compte que la méthode approchée précédente est somme toute très acceptable vu le faible écart obtenu avec la valeur exacte de 34,2 meV. Disons que la traduction de l'élargissement du puits par le terme 2δ nous rapproche assez bien de la bonne valeur d'énergie du niveau fondamental.

Exercice 15

1. Explicitons la solution générale de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \varphi(x)$$

Pour les domaines « hors puits », on a déjà vu que l'on a des solutions évanescentes

$$\varphi(x \leq -L/2) = A e^{Kx} \quad \text{et} \quad \varphi(x \geq L/2) = B e^{-Kx}$$

Dans le domaine intermédiaire, on peut adopter l'écriture

$$\varphi(x \in [-L/2; L/2]) = C \cos(kx) + D \sin(kx)$$

2. On sait que l'on doit avoir continuité de φ , ainsi que de $d\varphi/dx$ (énergie potentielle bornée). De ce fait, il vient les quatre équations suivantes

$$\boxed{A e^{-KL/2} = C \cos(kL/2) - D \sin(kL/2)} \quad (1)$$

$$\boxed{B e^{-KL/2} = C \cos(kL/2) + D \sin(kL/2)} \quad (2)$$

$$\boxed{A K e^{-KL/2} = C k \sin(kL/2) + D k \cos(kL/2)} \quad (3)$$

et

$$\boxed{-B K e^{-KL/2} = -C k \sin(kL/2) + D k \cos(kL/2)} \quad (4)$$

Notons que ces quatre équations imposent obligatoirement des valeurs d'énergies bien précises car on a un système homogène dont on ne veut pas la solution nulle. **C'est le déterminant de la matrice du système qui donne l'équation implicite vérifiée par les valeurs de E possibles.**

En fait, plutôt que de privilégier la recherche des valeurs propres (énergies E) pour en déduire les vecteurs propres correspondants (fonctions d'onde spatiales), on va plutôt procéder dans l'autre sens (moins calculatoire grâce aux symétries).

3. États stationnaires à fonctions d'onde spatiales symétriques.

a. Pour une fonction d'onde spatiale recherchée paire,

$$A = B \quad \text{et} \quad D = 0$$

et les quatre relations de la question précédente se réduisent à deux équations indépendantes

$$A e^{-KL/2} = C \cos(kL/2) \quad \text{et} \quad A K e^{-KL/2} = C k \sin(kL/2)$$

Les constantes A et C ne sont pas nulles (sinon la fonction d'onde serait nulle) donc leur élimination permet de se ramener effectivement à

$$\boxed{\frac{KL}{2} = \frac{kL}{2} \tan\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

Il s'agit d'une équation transcendante dont on ne peut trouver des solutions que numériquement ou graphiquement. C'est cette dernière méthode qui est proposée ensuite (ce qui explique cette écriture pas totalement simplifiée...).

b. On peut remarquer que la grandeur $K^2 + k^2$ ne dépend pas de E car

$$K^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

C'est une constante pour un puits et un quanton donnés. Par conséquent, on

peut trouver les valeurs de E acceptables via la détermination graphique des intersections dans le plan ($x = kL/2, y = KL/2$) pour le quadrant positif (car $k > 0$ et $K > 0$) entre la courbe d'équation

$$y = f(x) = x \tan x$$

et le quart de cercle de centre O de rayon R d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{où} \quad R = \sqrt{\frac{L^2 m V_0}{2 \hbar^2}}$$

On voit donc bien sur la figure suivante (en traits pleins) que pour V_0 fixé, donc R fixé, le nombre d'intersections est fini, chaque intersection correspondant à une valeur bien précise d'énergie : **les énergies des états stationnaires symétriques sont quantifiées et de nombre fini. Notons au passage qu'il existe forcément au moins une solution !**

4. États stationnaires à fonctions d'onde spatiales antisymétriques.

Cette fois-ci, pour une fonction d'onde spatiale recherchée impaire,

$$A = -B \quad \text{et} \quad C = 0$$

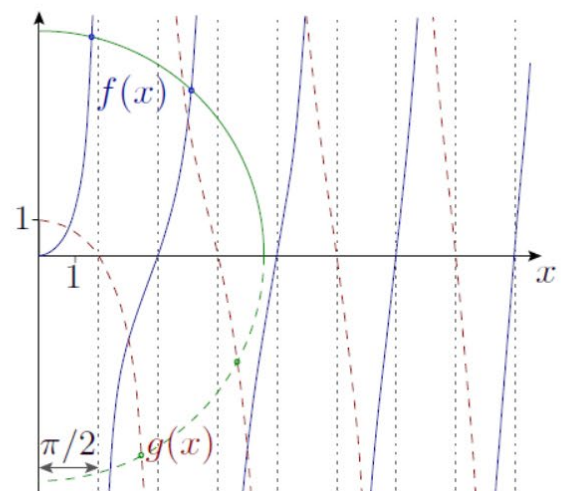
donc $A e^{-KL/2} = -D \sin(kL/2)$ et $A K e^{-KL/2} = D k \cos(kL/2)$

Les constantes A et D ne sont pas nulles (sinon la fonction d'onde serait nulle) donc leur élimination permet de se ramener à

$$\boxed{\frac{KL}{2} = -\frac{kL}{2} \cotan\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

Il s'agit encore d'une équation transcendante que l'on traite graphiquement de façon analogue à ce qui précède (cette fois-ci sur le quadrant ($x > 0, y < 0$) pour avoir une figure plus claire à mon goût ; traits en pointillés sur la figure). On a seulement à chercher les intersections entre le quart de cercle de rayon R dans ce domaine et la courbe d'équation

$$g(x) = x \cotan x$$



On voit encore une fois que pour V_0 fixé, donc R fixé, le nombre d'intersections est fini (voire nul), chaque intersection correspondant à une valeur bien précise d'énergie : **les énergies des états stationnaires antisymétriques sont quantifiées et de nombre fini**. De plus, d'après le positionnement des intersections, **les énergies des états stationnaires antisymétriques sont différentes de celles des états symétriques : les états sont alternés**.

5. Supposons qu'il existe une fonction d'onde spatiale φ ni paire, ni impaire, solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Alors, celle-ci s'écrit sous la forme d'une somme de deux fonctions paire φ_S et impaire φ_{AS} par théorème élémentaire mathématique⁷. Par linéarité de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, φ_S et φ_{AS} doivent en être solution mais les questions précédentes montrent qu'elles ne peuvent l'être pour une valeur commune d'énergie E . **Par conséquent, il n'existe pas d'autre état stationnaire que les états stationnaires symétriques et antisymétriques déjà trouvés.**
6. Il n'y a qu'un seul état stationnaire lié possible si les études graphiques précédentes ne fournissent qu'un seul point d'intersection. Or, il y a toujours une intersection dans le cas symétrique. Il ne faut retenir que celui-ci, d'où la condition

$$R < \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m L^2}}$$

BARRIERE DE POTENTIEL

Exercice 16

1. Les étapes à suivre pour accéder à la formule proposée pour Γ sont les suivantes :
- **Obtention de la forme générale de la fonction d'onde spatiale d'un état stationnaire par résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps** : on trouve dans chaque domaine une combinaison linéaire d'exponentielles complexes de pulsations spatiales

$$k_1 = \sqrt{\frac{2 m E}{\hbar^2}} \quad \text{pour } x < 0 \text{ et pour } x > L$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2 m (E - V_0)}{\hbar^2}} \quad \text{pour } 0 < x < L$$

Notons que, comme on considère un flux de quantons indépendants incidents, cela permet de faire disparaître l'une des six constantes d'intégration : celle relative

à l'onde d'amplitude de probabilité se propageant avec le vecteur d'onde $-k_1 \vec{e}_x$ dans le domaine $x > L$ est nulle. À ce point, on a notamment

$$\varphi(x < 0) = A_1 e^{i k_1 x} + A'_1 e^{-i k_1 x} \quad \text{et} \quad \varphi(x > L) = A_3 e^{i k_1 x}$$

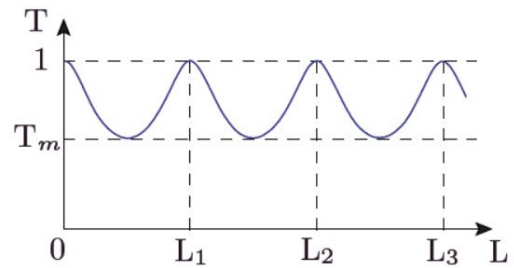
On voit que l'on a forcément des états stationnaires non liés (condition nécessaire de limite nulle à l'infini de la barrière non respectée).

- **Traduction des conditions de raccordement en $x = 0$ et $x = L$:** on peut écrire les relations de continuité de la fonction d'onde spatiale en $x = 0$ et $x = L$, ainsi que celles concernant sa dérivée (car l'énergie potentielle reste bornée). Cela fait donc quatre équations pour les cinq constantes d'intégration restant inconnues.
- **Déduction du coefficient de probabilité de transmission :** on peut accéder, grâce au système d'équations précédent, au rapport des amplitudes A_3/A_1 et ce rapport permet de déduire celui des courants de probabilité transmis et incident :

$$T = \left| \frac{J_3}{J_1} \right|^2 = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

Les étapes considérées restent valables lorsque $V_0 < 0$, tant que $E > 0$: on englobe ici aussi le cas des états non liés du puits fini de potentiel rectangulaire.

2. Les variations de T avec L sont représentées sur la figure ci-contre (les autres constantes étant fixées). On se rend compte que T oscille de manière périodique entre sa valeur minimale $T_m = 1/(1 + \gamma)$ et sa valeur maximale qui est 1 (il s'agit d'une fonction analogue à la fonction d'Airy de l'interféromètre de Fabry Pérothors-programme).



Il existe des **résonances en transmission** (résonances dites « en diffusion » pour des valeurs de L bien précises (avec n entier) :

$$L_n = n \frac{\pi}{k_2} = n \frac{\lambda_{DB,2}}{2} = n \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(E - V_0)}}$$

Pour ces valeurs, la probabilité de réflexion d'un quanton est donc parfaitement nulle (puisque $R = 1 - T$). En dehors de ces résonances, la probabilité de transmission diminue et un quanton incident peut être réfléchi par la barrière.

Comme déjà précisé lors de l'analyse par analogie « optique », ce sont les interférences quantiques entre ondes de probabilités incidentes et réfléchies qui sont à l'origine de ce comportement.

Ces effets quantiques sont d'autant plus marqués que γ est élevé, c'est-à-dire que E est proche de $\max(V_0, 0)$.

3. La figure de l'énoncé est cohérente puisque l'on retrouve des résonances en diffusion pour des valeurs d'énergie E_n dont les valeurs théoriques sont (en inversant la formule précédente de L_n)

$$E_n = V_0 + n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Notons que lorsque $E \gg V_0$, on tend vers le cas classique avec des quantons toujours transmis sans possibilité de réflexion (principe de correspondance respecté).

Pour information, la courbe en pointillés est la représentation de la fonction $f(E) = 1/(1 + \gamma) \dots$

4. **Le tracé de droite correspond manifestement à un cas de résonance en diffusion** : la densité de probabilité de présence est la même de part et d'autre de la barrière et les interférences quantiques n'existent que dans la barrière : on a donc une énergie qui est l'une des énergies E_n précédentes. Il n'y a pas d'onde d'amplitude de probabilité réfléchie en $x = 0$.

Le tracé de gauche concerne un cas hors résonance où les réflexions en $x = 0$ et $x = L$ conduisent à des interférences quantiques pour $x < L$.

Exercice 17

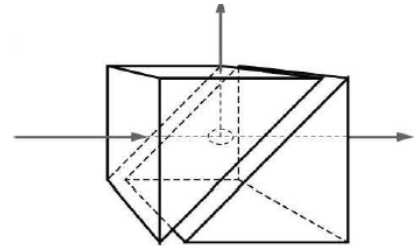
On a déjà vu au chapitre précédent qu'un domaine où $E - V < 0$ a pour analogue optique un plasma dans son domaine de réflexion totale ($\omega < \omega_p$ entraîne un indice imaginaire pur). Ainsi, la situation optique équivalente est celle où l'on prend une couche d'un tel plasma, comprise entre $x = 0$ et $x = L$, avec un milieu diélectrique d'indice optique n réel de part et d'autre. On éclaire en incidence normale par une onde plane monochromatique polarisée rectilignement cette couche depuis le domaine $x < 0$.

L'onde incidente va donner naissance au niveau du dioptre $x = 0$ à une onde réfléchie et une onde transmise, **cette dernière étant évanescence** (comme pour la marche de potentiel). Toutefois, cette onde évanescence a une amplitude non nulle dans toute l'épaisseur de la couche, donc elle conduit à la création d'une onde transmise au-delà de $x = L$! Il peut aussi y avoir, a priori, une onde évanescence réfléchie par l'interface $x = L$ (mais d'amplitude très faible...). **On prévoit donc un effet tunnel ondulatoire classique (effet tunnel optique) ; on parle aussi de réflexion totale frustrée.**

On peut s'appuyer sur cette analogie « optique » pour prévoir qu'un flux continu de quantons incidents d'énergie $E < V_0$ fixée conduira à un flux transmis au-delà de la barrière et à un flux réfléchi, avec des interférences quantiques pour $x < 0$. De plus, si l'on raisonne pour un seul quanton incident, cela veut dire qu'il est soit transmis, soit réfléchi par la barrière !

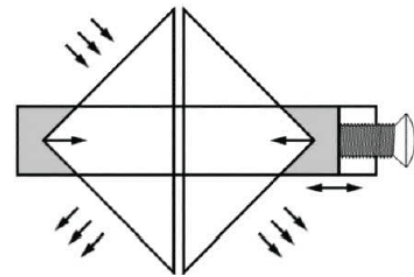
Ce n'est pas du tout ce qui est prévu par l'analyse précédente de la particule classique !

L'effet tunnel classique (ou optique), révélé dans l'exercice précédent, peut être mis en évidence expérimentalement par un dispositif avec deux prismes de paraffine isocèles rectangles, de bases disposées parallèlement l'une à l'autre¹² (voir figure). Une onde électromagnétique en faisceau quasi-parallèle arrive sur le premier prisme et subit une réflexion totale interne si son angle d'incidence dépasse l'angle de réfraction limite. Toutefois, on peut quand même récupérer une onde transmise au niveau du second prisme grâce à l'effet tunnel classique, ceci étant mesurable si la distance caractéristique d'évanescence est au minimum de l'ordre de la distance entre les deux prismes : c'est jouable avec des ondes centimétriques...



On peut citer des applications de cet effet tunnel optique classique :

- **Cubes séparateurs FTIR** : ces cubes sont réalisés dans l'esprit de l'expérience précédente, les deux prismes étant en verre et leur séparation étant ajustable (voir figure). De la sorte, on peut diviser un faisceau incident en deux faisceaux d'intensités relatives réglables (facteur de transmission modifiable de 0% à quasiment 100%)...



- **Microscopie optique à champ proche (dite aussi « à ondes évanescentes »)** : il existe divers types de microscopes à ondes évanescentes (non détaillés ici). Ils permettent d'accéder à des images présentant une résolution latérale inférieure à 10 nm et une résolution longitudinale inférieure à 0,5 nm (mais ces images ne représentent pas directement un profil de surface car les irrégularités d'indice optique, par exemple, jouent sur les relevés, ce qui n'est pas forcément sans intérêt!). La construction de l'image est généralement réalisée sur le même principe que pour les autres types de microscopes à champ proche (à force atomique ou à effet tunnel vu plus loin) : elle s'appuie sur un système de balayage avec asservissement de la position de la sonde de mesure ou de l'échantillon selon une grandeur de contrôle.

Exercice 18

1. Les étapes à suivre pour accéder à la formule proposée pour T sont les mêmes que pour le cas $E > V_0$. Ce n'est que la constante k_2 relative au domaine $0 < x < L$ et qui valait

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

qu'il faut formellement remplacer par une constante complexe

$$i\mu = i\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

car la fonction d'onde devient une combinaison linéaire d'ondes évanescentes dans la barrière. On remplace donc formellement, dans l'expression fournie pour T , k_2 par $i\mu$, sachant que $\sin ix = i \operatorname{sh} x$ d'après la formule d'Euler de la fonction sinus. Il vient

$$T = \frac{1}{1 - \gamma \operatorname{sh}^2 \left[\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} L \right]}$$

2. On note que **les états stationnaires ne sont pas liés** car on a toujours

$$\varphi(x < 0) = A_1 e^{ik_1 x} + A_1' e^{-ik_1 x} \quad \text{et} \quad \varphi(x > L) = A_3 e^{ik_1 x}$$

et la condition nécessaire de limite nulle à l'infini de la barrière n'est pas respectée.

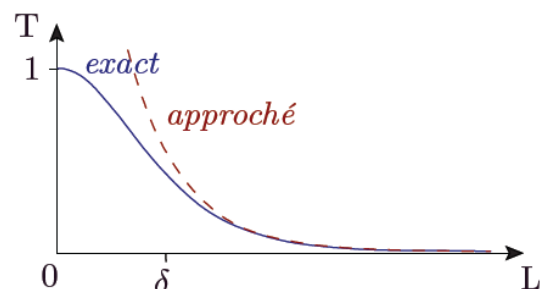
3. La décroissance exponentielle de T en fonction de L n'est observable qu'aux « grandes » valeurs de L , ce qui se précise par

$$L \gg \delta = \frac{1}{\mu} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

Il n'est alors pas difficile de valider la loi de l'énoncé (sachant que $\operatorname{sh} x \simeq e^x/2$ pour $x \gg 1$)...

L'allure de T en fonction de L est donnée sur la figure ci-contre (avec précision en pointillés du tracé obtenu par la formule approchée dans le cas $L \gg \delta$).

Puisque T n'est pas nul, **il y a possibilité de transmission de quantons à travers**



la barrière, ce qui n'est pas possible dans le cas particulière classique : on parle d'effet tunnel quantique. On peut préciser que le phénomène est « notable » pour des largeurs de barrière de l'ordre ou inférieures à δ .

4. La partie nouvelle du tracé de $T(E)$ est celle pour $E < V_0$ (l'autre partie, avec résonances en diffusion, ayant déjà été traitée). On voit essentiellement que la probabilité de transmission est d'autant plus élevée que E se rapproche de V_0 (l'approche théorique ne permet pas de voir en un simple coup d'œil cela).

Le tracé de la densité de probabilité de présence montre la présence d'interférences quantiques avant la barrière (sans surprise en raison de l'onde d'amplitude de pro-

tabilité réfléchi) et, surtout, la possibilité de transmission (densité de probabilité de présence uniforme non nulle après la barrière).

Enfin, dans la barrière, on peut considérer que la décroissance de la densité de probabilité de présence est **exponentielle** pour $L \gg \delta$ (car alors, l'onde évanescente de fonction d'onde spatiale en $e^{-x/\delta}$ prédomine largement sur celle en $e^{x/\delta}$).

Exercice 19

1. Les électrons incident ne sont pas relativistes (vitesse $v \simeq 1.10^6 \text{ m.s}^{-1} \ll c$) et la distance caractéristique de pénétration sous barrière est

$$\delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}} = 0,09 \text{ nm}$$

Puisque $L \simeq 5,7 \delta$ est supérieur à quelques δ , on peut déduire la proportion demandée par la formule approchée

$$T \simeq 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2L/\delta} \simeq 4.10^{-5}$$

Le facteur devant l'exponentielle n'est pas obligatoirement à connaître mais, si on le prend de l'ordre de l'unité, on trouve le même ordre de grandeur.

En ce qui concerne l'intensité, on n'en récupère que la fraction T , soit

$$I_s = TI \simeq 0,4 \mu\text{A}$$

2. Les protons sont non relativistes (vitesse $v \simeq 3.10^4 \text{ m.s}^{-1} \ll c$) et δ diminue fortement car $m_p \simeq 1836 m_e$. Il vient

$$\delta = 2 \text{ pm} \ll L$$

$$T \simeq 3.10^{-213}$$

$$I_s \simeq 2.10^{-215} \text{ A}$$

3. Dans les conditions proposées, les protons ne conduisent pas à un effet tunnel mesurable, contrairement au cas des électrons. Cela est simplement dû à la différence de leurs masses...

DOUBLE Puits DE POTENTIEL

Exercice 20

1. Comparaison rapide classique-quantique...

a. Si la particule classique est placée dans le puits de droite (resp. gauche), son espace accessible est $x \in]b - a/2; b + a/2[$ (resp. $x \in]-b - a/2; -b + a/2[$) puisque son énergie cinétique ne peut être que positive.

- b. Si l'on raisonne avec un quanton, la barrière intermédiaire d'énergie potentielle V_0 ne suffit pas à le contraindre à rester dans l'espace accessible classique. Il peut traverser la barrière **par effet tunnel** et son espace accessible est plus largement $x \in] -b - a/2; b + a/2[$.

Dans le cadre de l'étude de la molécule d'ammoniac, cela veut dire que la physique quantique permet d'envisager une probabilité de retournement de celle-ci, comme un parapluie en plein vent...

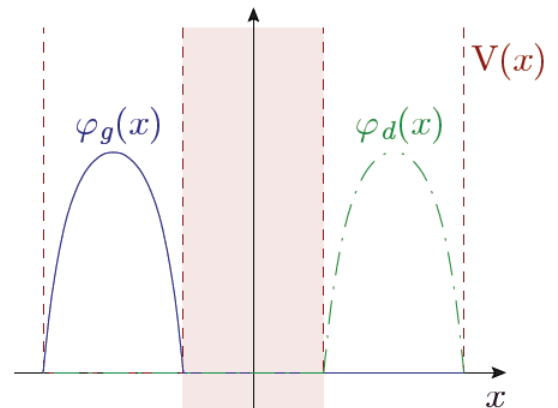
Bien entendu, cette probabilité de retournement dépend de l'importance de l'effet tunnel, lié essentiellement aux valeurs de V_0 , $2b - a$ (largeur de barrière) et m .

2. Approche graphique de l'effet de couplage des puits...

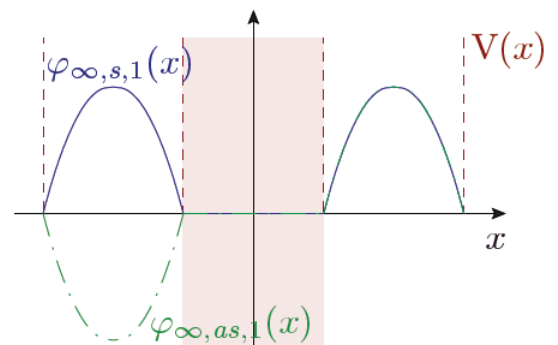
- a. Pour l'état fondamental d'un puits infini de largeur a , la fonction d'onde spatiale est une arche de sinussoïde de demi-période a s'annulant sur les murs du puits. La pulsation spatiale associée est $k_{\infty,1} = \pi/a$, donc l'énergie est

$$E_{\infty,1} = \frac{\hbar^2 k_{\infty,1}^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$$

- b. **La dégénérescence est de deux** pour le niveau fondamental d'énergie $E_{\infty,1}$ avec l'énergie potentielle considérée car les deux puits sont identiques, découplés (barrière infinie), et un quanton peut occuper le puits de gauche ou celui de droite. Les états stationnaires correspondants ont les fonctions d'onde spatiales $\varphi_g(x)$ et $\varphi_d(x)$, représentées sur la figure ci-contre (arches de sinussoïde de demi-période a s'annulant au bord de chaque puits).



Les fonctions d'onde spatiales $\varphi_g(x)$ et $\varphi_d(x)$ ne sont pas symétriques ou anti-symétriques. On peut toutefois construire les fonctions d'ondes spatiales symétrique $\varphi_{\infty,s,1}(x)$ et anti-symétrique $\varphi_{\infty,as,1}(x)$ par somme et différence avec facteur de normalisation $1/\sqrt{2}$ (voir figure ci-contre) :



$$\varphi_{\infty,s,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_g(x) + \varphi_d(x)]$$

et

$$\varphi_{\infty,as,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\varphi_g(x) + \varphi_d(x)]$$

- c. Les tracés de l'énoncé dans le cas où V_0 est fini est cohérent avec le cas précédent : quand $V_0 \rightarrow \infty$, la partie des fonctions d'onde dans la barrière s'annule...

Faisons le lien entre une propriété des représentations des fonctions d'onde spatiales et l'énergie qui leur est associée. Que V_0 soit fini non nul ou tende vers l'infini, l'équation de Schrödinger indépendante du temps impose aux fonctions d'onde spatiales dans les puits d'être sinusoïdales de pulsation spatiale

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Ainsi, plus la pulsation spatiale dans un puits de la fonction d'onde spatiale est grande, plus l'énergie de l'état stationnaire associé est importante ! Par analyse des tracés, on en déduit que

$$E_{s,1} < E_{as,1} < E_{\infty,1}$$

Force est de constater que le couplage des puits par effet tunnel entraîne une levée de dégénérescence du niveau fondamental : celui-ci est clivé et la valeur moyenne des niveaux d'énergie clivés est inférieure à la valeur du niveau dégénéré initial.

Exercice 21

1. La dynamique de l'état quantique est obtenue en superposant les fonctions d'onde des états stationnaires associés à l'état initial :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_S(x) e^{-iE_S t/\hbar} - \varphi_A(x) e^{-iE_A t/\hbar}]$$

soit
$$\Psi(x, t) = \frac{e^{-iE_S t/\hbar}}{\sqrt{2}} [\varphi_S(x) - \varphi_A(x) e^{-i(E_A - E_S) t/\hbar}]$$

donc
$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} |\varphi_S(x) - \varphi_A(x) e^{-i(E_A - E_S) t/\hbar}|^2$$

2. La densité de probabilité de présence précédente est oscillante avec une pulsation $\omega = (E_A - E_S)/\hbar$, d'où la fréquence de Bohr

$$f = \frac{E_A - E_S}{h}$$

À l'instant $t_i = \pi/f$, on note que

$$|\Psi(x, t_i)|^2 = \frac{1}{2} |\varphi_S(x) + \varphi_A(x)|^2$$

ce qui correspond au profil de densité de probabilité de présence initial après changement de x en $-x$. Autrement dit, c'est l'état « inverse » de celui de départ, où le quanton présente une probabilité de présence plus grande dans le puits de droite (état φ_D).

3. Inversion de l'ammoniac...

a. Le temps caractéristique d'inversion τ correspond à t_i . On obtient les applications numériques

$$\tau = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad \text{et} \quad f_0 = 24 \text{ GHz}$$

La molécule d'ammoniac admet des inversions très rapides !

b. Le domaine spectral est celui des **micro-ondes** (longueur d'onde de l'ordre du centimètre). D'ailleurs, MASER est un acronyme signifiant Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (à comparer à l'acronyme LASER qui signifie Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

4. Pour l'arsine, on trouve un temps d'inversion

$$\tau' = 4,0 \cdot 10^7 \text{ s} \simeq 1,3 \text{ ans}$$

Cette inversion ne peut pas être directement mesurée vu son temps de réalisation. On peut considérer que la molécule d'arsine ne présente pas d'inversion sur les échelles de temps des expériences de chimie.

La molécule d'arsine est pourtant assez proche en apparence de celle d'ammoniac. Le « petit » changement d'atome (azote en arsenic cinq fois plus gros) conduit à un temps d'inversion radicalement différent (17 ordres de grandeur d'écart !). Ceci est en lien avec un facteur exponentiel très sensible d'effet tunnel dans la barrière de potentiel du double puits...