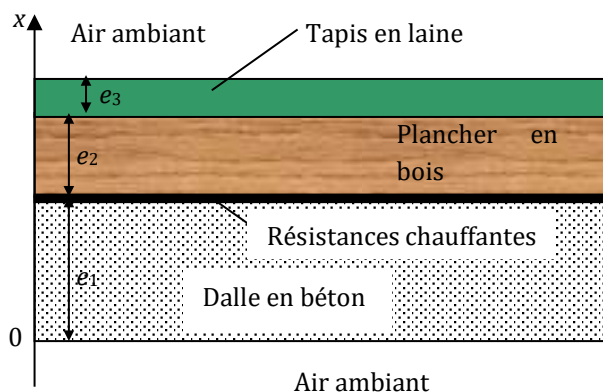


DIFFUSION THERMIQUE

EXERCICE 1

Plancher chauffant.

On modélise un plancher chauffant électriquement par la superposition des éléments suivants :



Caractéristiques techniques :

Béton : $e_1 = 20 \text{ cm}$, $\lambda_1 = 1,0 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$

Bois : $e_2 = 2,0 \text{ cm}$, $\lambda_2 = 0,20 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$

Tapis : $e_3 = 5,0 \text{ mm}$, $\lambda_3 = 1,0 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$

La pièce a une surface de 20 m^2 .

Les résistances chauffantes sont placées entre la dalle en béton et le plancher en bois. On négligera l'épaisseur de cet élément situé en $x = e_1$. La surface extérieure du tapis est à 25°C et l'air ambiant est à 20°C en régime stationnaire.

On modélisera les échanges conducto-convectifs de surface et radiatifs par la loi suivante : le flux thermique cédée par une paroi à l'air environnant est $\phi_{\text{paroi} \rightarrow \text{air}} = hS(T_{\text{paroi}} - T_{\text{air}})$. On prendra le même coefficient $h = 10 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ pour les parois supérieure et inférieure.

1. Déterminer la puissance thermique dissipée par effet Joule dans les résistances chauffantes.
2. Comparer le flux thermique traversant le plancher et le tapis au flux thermique traversant la dalle en béton. Expliquer alors pourquoi il est important de poser un isolant thermique sous la dalle en béton.
3. Calculer l'épaisseur minimale de polystyrène expansé ($\lambda = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$) à placer sous la dalle pour que le flux thermique traversant la dalle de béton ne dépasse pas 5% de la puissance dissipée dans les résistances chauffantes.

EXERCICE 2

Fil électrique $2,5 \text{ mm}^2$

Un fil électrique en cuivre de $2,5 \text{ mm}^2$ de section circulaire (rayon R_1) est entouré d'une gaine (isolante électrique) de rayon $R_2 = 1,5 \text{ mm}$. Le fil de cuivre est supposé infiniment long et est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I .

Le transfert thermique entre la gaine et l'air ambiant est de nature convective. On notera h le coefficient de transfert thermique de surface. La température de l'air ambiant est $T_a = 20^\circ\text{C}$.

On se place dans tout l'exercice en régime stationnaire de transferts thermiques.

Données :

$h = 20 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$

Conductivités thermiques :

Cuivre : $\lambda_1 = 4,0 \cdot 10^2 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$; Gaine : $\lambda_2 = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$

Conductivité électrique du cuivre : $\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{.m}^{-1}$

1. Exprimer la résistance thermique d'une longueur L de gaine.
2. Montrer que le fil de cuivre est pratiquement isotherme. Exprimer sa température T_1 pour $I = 15$ A.
3. La température de la gaine doit rester en tout point inférieure à $T_{\max} = 45^\circ\text{C}$. En déduire l'intensité maximale $I_{\max}$ du courant.
4. Quelle est l'influence du rayon R_2 de la gaine sur cette intensité $I_{\max}$?

EXERCICE 3

Condition pour ne pas se brûler

Un tasse cylindrique en grès de rayon intérieur R et d'épaisseur e contient du café à la température $\theta_1 = 80^\circ\text{C}$. Le grès a un coefficient de diffusion thermique λ . Les échanges thermiques à travers la surface de séparation entre le grès et l'air extérieur à la température $\theta_2 = 20^\circ\text{C}$ peuvent être modélisés par la loi de Newton : $j = h_{g/a}(\theta_s - \theta_2)$ où j représente la puissance thermique surfacique cédée par la surface du grès à l'air extérieur, θ_s désigne la température à la surface de la tasse et $h_{g/a}$ le coefficient de transfert thermique entre le grès et l'air

1°) En précisant clairement les approximations faites, déterminer l'épaisseur e minimum pour qu'on ne se brûle pas ($\theta_s < 50^\circ\text{C}$) en tenant la tasse.

2°) En fait, $e = 2$ mm. Quelle longueur minimum donner à une anse (en grès) de section circulaire (rayon $a = 5$ mm) dont on négligera le rayon de courbure, pour que la température en son milieu soit de 30°C ?

A.N. : $h_{g/a} = 20$ USI ; $\lambda = 0,1$ USI.

**EXERCICE 4**

Hypothermie d'un plongeur.

Un plongeur sous-marin, de température interne uniforme $T_i(t)$, est immergé dans une eau à la température $T_e = 15^\circ\text{C}$.

On notera R_1 la résistance thermique de l'enveloppe du corps humain et R_2 celle de la combinaison de plongée.

Les transferts thermiques de surface entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par la loi de Newton : la puissance transférée est proportionnelle à la différence de température et à l'aire de l'interface. On notera h le coefficient de proportionnalité.

On note M la masse du plongeur et c la capacité thermique massique du corps humain. L'état d'hypothermie est atteint lorsque la température du corps interne du plongeur est inférieure à 35°C .

On néglige les transferts radiatifs et on se placera en régime stationnaire.

1. Quelle puissance thermique est transférée de l'intérieur du corps du plongeur vers l'eau ?
2. Le corps humain produit la puissance P_{ATP} . En supposant P_{ATP} constante, combien de temps le plongeur peut-il être immergé avant d'atteindre l'hypothermie ?
3. Les transferts radiatifs ont été négligés. Analyser ce phénomène et conclure sur la validité de cette hypothèse.

Données :

$$R_1 = 2,5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}, R_2 = 5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}, h = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{Aire du corps humain : } S = 2,0 \text{ m}^2$$

$$M = 80 \text{ kg}$$

$$c \approx 3,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$P_{ATP} = 200 \text{ W}$$

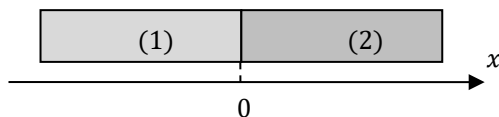
$$\text{Constante de Stefan : } \sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

EXERCICE 5*Température de contact.*

1. Expliquer qualitativement pourquoi une pièce de métal paraît plus froide au contact qu'un objet en bois (les deux objets étant depuis longtemps dans une même pièce tempérée).

Afin d'étudier par le calcul le problème précédent, on utilise le modèle suivant :

Deux barres calorifugées latéralement, très longues, de températures initiales uniformes $T_{1,0}$ et $T_{2,0} > T_{1,0}$, de section S , de capacités thermiques massiques c_1 et c_2 , de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , et de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 , sont mises en contact par une extrémité.



On pose: $u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ et $\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy$ où D représente la diffusivité thermique du matériau.

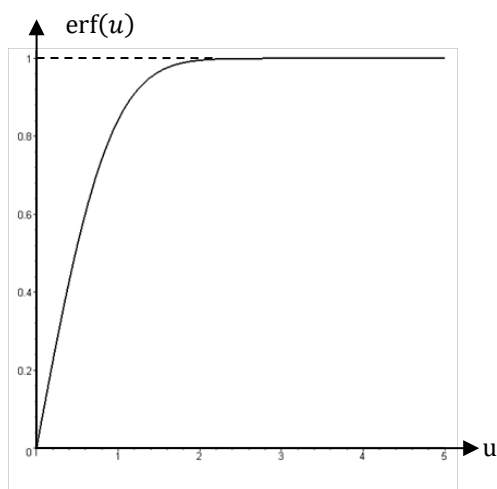
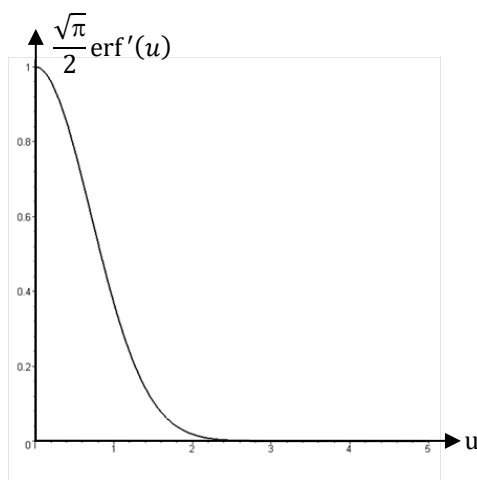
2. Exprimer la diffusivité thermique D_i de chaque barre en fonction de ses caractéristiques.
3. Montrer qu'en tout point de chaque barre, la température s'écrit: $T(x, t) = A_i + B_i \cdot \text{erf}(u_i)$ et en déduire la température de jonction T_o en fonction des coefficients $\alpha_i = \sqrt{\rho_i c_i \lambda_i}$.
4. Application numérique.

Quelques valeurs des coefficients α sont données ci-dessous :

Matériau	Cuivre	Bois	Tissus musculaires
$\alpha(\text{SI})$	$1,83 \cdot 10^4$	$1,70 \cdot 10^2$	$1,58 \cdot 10^3$

Chercher la température de contact pour les couples suivants : Cuivre(20°C) / peau (35°C) et Bois (20°C)/ peau (35°C). Conclure.

Données:

**EXERCICE 6***Rayonnement d'une sphère d'uranium*

On considère une sphère d'uranium de rayon R placée au sein d'un grand volume d'eau. Cette sphère est le siège de réactions nucléaires dégageant une puissance s par unité de volume. On note K la conductivité thermique de l'uranium, K_e celle de l'eau. L'étude est faite en régime permanent de conduction radiale.

1. Par un bilan énergétique approprié, calculer le vecteur densité de courant thermique en tout point des deux milieux. On fera intervenir, entre autre, s et r .

2. A très grande distance de la sphère, la température vaut T_0 . Au niveau de l'interface, il existe des échanges conducto-convectifs obéissant à la loi de Newton : la puissance surfacique transférée par ce mode de transfert d'énergie est $h[T_e(R) - T(R)]$, où $T_e(R)$ est la température de l'eau au contact de la sphère, différente de celle de l'uranium $T(R)$. Déterminer T en tout point situé à l'intérieur de la sphère.

EXERCICE 7

Gel d'un lac

On considère un lac dont la température de l'eau est sa température de fusion $T_f = 0^\circ\text{C}$. L'air de l'atmosphère est à $T_a = -20^\circ\text{C}$. Et les échanges d'énergie par transfert calorifique entre l'atmosphère et la surface du lac sont caractérisés par le coefficient conducto-convectif $h = 30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$. L'eau du lac commence à geler à la date $t = 0$, l'épaisseur de la glace est notée $e(t)$. On suppose qu'à chaque instant un régime quasi-stationnaire est atteint bien que l'épaisseur de la glace varie avec le temps.

1. Ecrire une équation permettant de calculer la date à laquelle une certaine épaisseur de glace est atteinte. En déduire simplement l'allure du graphe de la fonction $e(t)$. A quelle date l'épaisseur de la glace est-elle de 5 cm ? A quelle date la vitesse de croissance de l'épaisseur $v = \frac{de}{dt}$ est-elle maximale ? L'évaluer numériquement.
2. Les calculs ont été effectués dans le cadre d'une approximation quasi-stationnaire. Discuter qualitativement cette hypothèse de travail.

Données relatives à la glace :

Conductivité thermique : $\lambda = 2,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Densité volumique : $\rho = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Chaleur latente de fusion : $L_f = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

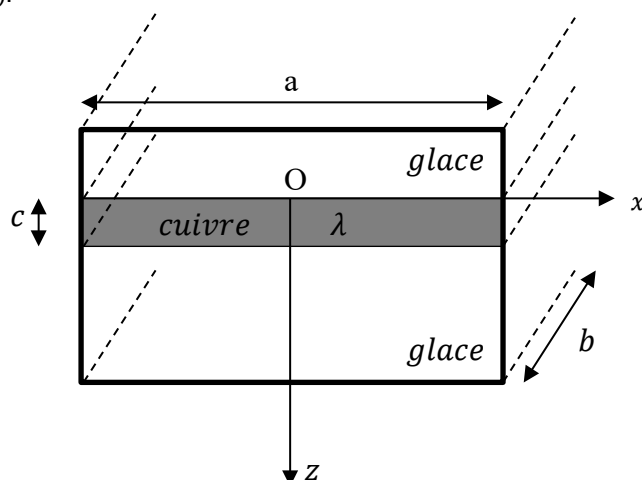
Capacité calorifique : $C = 2,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

EXERCICE 8

Expérience du regel

On pose une barre de cuivre sur un bloc de glace. Elle descend à une vitesse V car la glace fond et regèle par-dessus. Il s'établit alors deux équilibres solides/liquides :

- ✓ Au-dessus de la barre ($P_s = P_0, T_s$).
- ✓ Au-dessous de la barre (P_i, T_i).



Exprimer la vitesse V en fonction de $L_f, \lambda, m, g, T_s, v_{liq}, v_{sol}, a$ et b .

Proposer un ordre de grandeur.

Exercice 9

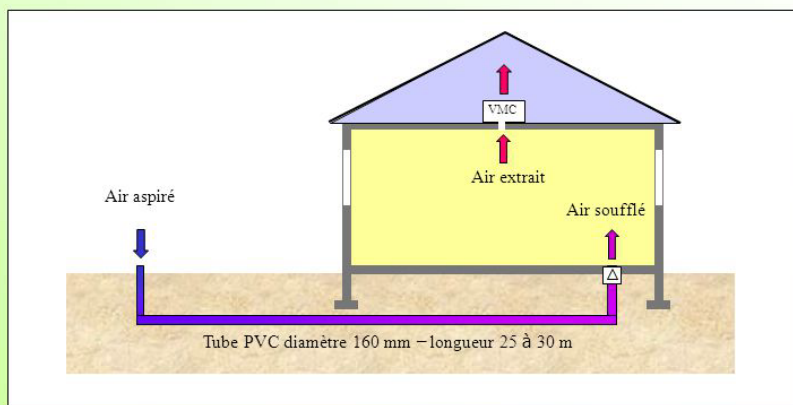
Puits canadien



Le puits canadien



Le puits canadien (ou puits provençal) consiste à faire passer, avant qu'il ne pénètre dans le logement, une partie de l'air neuf de renouvellement par des tuyaux enterrés dans le sol à une profondeur de 1 à 2 m.



Ce système permet de réduire la consommation d'énergie en hiver, et de réduire la température ambiante en été pour une très faible consommation électrique.

32

Question : Expliquer le principe du puits canadien.

DIFFUSION MOLECULAIRE

EXERCICE 10

Une résolution de l'équation de diffusion

On considère un processus de diffusion unidimensionnel suivant la direction Ox . Pour certaines conditions initiales, il est possible de chercher une solution de l'équation de diffusion sous la forme $n(x, t) = n_0 + f(x) \cdot g(t)$, où n_0 est une constante, et f et g des fonctions respectivement de x et de t .

- 1) Déterminer les fonctions f et g . On ne cherchera pas à déterminer les constantes qui apparaîtront dans le calcul.
- 2) La condition initiale, à $t = 0$, est $n(x, 0) = n_1 + n_2 \sin(px)$, où n_1, n_2 et p sont des constantes. Montrer que la solution trouvée ci-dessus convient et déterminer complètement cette solution.

EXERCICE 11*Diffusion en présence de sources de particules*

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section droite d'aire S , s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On note $n(M, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Les réactions nucléaires entre les neutrons et la matière entraînent une production de neutrons : il apparaît $\delta^2 N p = K \cdot n(M, t) \cdot d\tau \cdot dt$ neutrons pendant une durée dt dans un volume élémentaire $d\tau$ autour du point M , où $K = 3,5 \cdot 10^4 \cdot \text{s}^{-1}$ est une constante positive caractéristique des réactions nucléaires.

On admet en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre, en $x = 0$ et $x = L$; en revanche, on suppose que $n(x, t)$ ne s'annule pas à l'intérieur du cylindre.

- 1) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$.
- 2) Dans le cas du régime stationnaire, déterminer $n(x)$ à une constante multiplicative près. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de L que l'on calculera.
- 3) a) En régime quelconque, chercher $n(x, t)$, à une constante multiplicative près, sous la forme $n(x, t) = h(x) \cdot g(t)$.
b) En déduire que $n(x, t)$ diverge si L est supérieur à une valeur critique L_c que l'on déterminera. Application numérique.

EXERCICE 12*Source sphérique*

On considère un milieu dans lequel se produit la diffusion de neutrons caractérisée en un point M par la densité particulaire $n(r, t)$ dépendant uniquement de $r = OM$ et de t . Les particules radioactives qui produisent les neutrons sont présentes dans la sphère de centre O et de rayon a . Elles produisent σ neutrons par unité de temps et de volume, σ étant une constante.

- 1) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $n(r, t)$.
- 2) Déterminer les solutions $n(r)$ en régime stationnaire.

EXERCICE 13*Diffusion d'atomes dans les solides*

On considère un phénomène de diffusion unidimensionnel, suivant la direction Ox , dans un milieu occupant tout le demi-espace $x > 0$. On appelle D le coefficient de diffusivité et $n(x, t)$ la concentration de particules en x à l'instant t . On note $\vec{j}$ le vecteur densité de courant particulaire.

À l'instant initial, la concentration en atomes est nulle partout sauf dans une faible épaisseur située en $x = 0$, où l'on implante une quantité Q d'atomes implantés par unité de surface du matériau. Au cours de la diffusion, la quantité Q de particules présentes dans le matériau reste constante.

- 1) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$.
- 2) On montre alors que la concentration de particules dans le matériau au cours de la diffusion est de la forme $n(x, t) = B(t) e^{-\frac{x^2}{A(t)}}$ où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions du temps.

On donne l'intégrale : $\int_0^{\infty} e^{-u^2} . du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Déterminer les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ en fonction de Q, D et t .

3) Déterminer la profondeur de diffusion h pour laquelle $n(h,t) = n(0,t)/e$.

4) Au bout d'une heure, h vaut 5 μm . Donner l'allure du profil des concentrations à $t_1 = 1$ heure et à $t_2 = 3$ heures.

EXERCICE 14

Atmosphère isotherme en équilibre.

On considère une atmosphère constituée d'un gaz parfait, en équilibre hydrostatique.

1) Donner l'expression de la densité moléculaire $n(z)$ en fonction de la masse m des molécules, de l'altitude z , de la température T , et du champ de pesanteur g (supposé uniforme). La densité au sol est notée n_0 , et la constante de Boltzmann k_B .

2) En déduire l'existence d'un courant de diffusion. Quel est son sens ? Déterminer la vitesse moyenne u des molécules correspondant à ce mouvement de diffusion ; on note D le coefficient de diffusion.

3) En déduire la nécessité de l'existence d'un courant de sens opposé, de vitesse moyenne $-u$. Quelle en est la cause ? Montrer alors que les collisions subies par une molécule de gaz sont en moyenne équivalente à une force de frottement fluide αu , dirigée en sens inverse de la vitesse $-u$. Exprimer le coefficient de frottement α en fonction des données. Calculer u et α .

Données : $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$; $M = 14 \text{ g.mol}^{-1}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $D = 1,8.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. La constante des gaz parfaits vérifie $R = N_A.k_B$, où N_A est le nombre d'Avogadro.