

X PC 21019

(diffusion libre)

1. NH_3 a la forme d'une pyramide dont l'atome d'azote occupe le sommet et les trois atomes d'hydrogène forment la base (voir figure). Soit P le plan des trois atomes d'hydrogène, D la perpendiculaire à P passant par l'atome d'azote, x est l'abscisse de l'intersection de P et D, l'atome d'azote étant pris comme origine. La molécule restant pyramidale, et l'azote fixe, l'énergie potentielle varie en fonction de x . Il existe a priori deux positions d'équilibre équivalentes selon que l'atome d'azote est d'un côté ou de l'autre de P. Le système se ramène à un quanton représentant le mouvement de l'atome d'azote par rapport à P, soumis à l'énergie potentielle $V(x)$ et qui oscille de part et d'autre de l'atome d'azote.

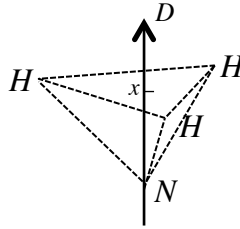


Figure 1: Molécule d'ammoniac.

2. Les fonctions φ_G et φ_D n'étant pas associées à des états stationnaires de l'équation de Schrödinger, on ne peut pas dire grand chose des coefficients à ce stade, si ce n'est qu'ils décrivent le fait que l'atome d'azote va avoir une certaine probabilité de présence (dépendant du temps) de part et d'autre du plan des hydrogènes.

La normalisation de la fonction d'onde impose $\int_{-\infty}^{+\infty} |C_G(t)\varphi_G + C_D(t)\varphi_D|^2 dx = 1$.

3. Si à $t = 0$, $\psi(x, t = 0) = \varphi_+(x)$, alors pour $t > 0$, $\psi(x, t) = \psi_+(x, t) = \varphi_+(x) \exp(-iE_+t/\hbar)$, où E_+ est l'énergie de l'état stationnaire $\psi_+(x, t)$.

Si à $t = 0$, $\psi(x, t = 0) = \varphi_-(x)$, alors pour $t > 0$, $\psi(x, t) = \psi_-(x, t) = \varphi_-(x) \exp(-iE_-t/\hbar)$, où E_- est l'énergie de l'état stationnaire $\psi_-(x, t)$.

Notons que dans ce cas, la probabilité de présence du quanton est indépendante du temps (qui est une propriété générale des états stationnaires).

4. Soit $\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_+(x) + \varphi_-(x)]$. Alors, par linéarité de l'équation de Schrödinger, $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_+(x) \exp(-iE_+t/\hbar) + \varphi_-(x) \exp(-iE_-t/\hbar)]$,

D'où $\psi(x, t) = \frac{1}{2} [(\varphi_G(x) + \varphi_D(x)) \exp(-iE_+t/\hbar) + (\varphi_G(x) - \varphi_D(x)) \exp(-iE_-t/\hbar)]$

$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi_G(x) (\exp(-iE_+t/\hbar) + \exp(-iE_-t/\hbar)) + \varphi_D(x) (\exp(-iE_+t/\hbar) - \exp(-iE_-t/\hbar))]$. D'où

$$C_G(t) = \frac{1}{2} (\exp(-iE_+t/\hbar) + \exp(-iE_-t/\hbar))$$

5. La probabilité que l'atome d'azote soit détecté à gauche du plan des H est égale au carré de la norme de la projection de la fonction d'onde sur φ_G (mesure en physique quantique hors programme...), soit $|C_G(t)|^2 = \frac{1}{4} |\exp(-iE_+t/\hbar) + \exp(-iE_-t/\hbar)|^2 = \frac{1}{4} (2 + \exp(-i(E_+ - E_-)t/\hbar) + \exp(i(E_+ - E_-)t/\hbar))$.

Soit

$$P_G(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(t\Delta E/\hbar))$$

La probabilité oscille sinusoidalement en fonction du temps avec une période $T = \frac{h}{\Delta E}$.

6. $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Avec $mc/p \ll 1$ et en faisant un d.l. à l'ordre 1,

$$E = pc \left(1 + \frac{m^2c^4}{p^2c^2} \right) \simeq pc + \frac{m^2c^3}{2p}$$

7. $\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p} c^3 = \frac{\Delta m^2}{2p} c^3$

8. En utilisant les résultats du 5., et puisque l'analogie a été précisée $P_e(\ell) = \frac{1}{2} (1 + \cos(t\Delta E/\hbar))$. Avec $t = \ell/c$:

$$P_e(\ell) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\ell \Delta E}{\hbar c} \right) \right)$$

La période spatiale d'oscillation est par conséquent (homogène) : $L = 2\pi \frac{\hbar c}{\Delta E} = \frac{\hbar c}{\Delta E}$

$$L = \frac{2\hbar p}{\Delta m^2 c^2}$$

9. Le signal n'est pas vraiment périodique, le flux de neutrinos doit s'appauvrir au cours du temps par interaction avec la matière. Cependant, on mesure une pseudo-période $\mathcal{P} = L/E$ de 36 km.MeV⁻¹. Or

$$\mathcal{P} = \frac{L}{E} = \frac{2\hbar p}{\Delta m^2 c^2 p c \left(1 + \frac{m^2 c^4}{p^2 c^2} \right)} \simeq \frac{2\hbar}{\Delta m^2 c^3}. \text{ D'où}$$

$$\Delta m^2 c^4 = \frac{2\hbar c}{\mathcal{P}}$$

A.N. $\Delta m^2 c^4 = 7.0.10^{-5}(\text{eV})^2$. C'est très petit par rapport aux énergies de masses usuelles.

10. En appelant ϕ le flux de neutrinos en fonction de la distance parcourue, $\phi(\ell) = \phi(0)P_e(\ell)$. L'incertitude relative sur la probabilité est $\frac{\Delta P_e}{P_e} = \sqrt{\left(\left(\frac{\Delta \phi(\ell)}{\phi(\ell)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \phi(0)}{\phi(0)} \right)^2 \right)} = 0,15$. Il faudrait que la probabilité ait varié d'au moins 20% pour prendre au sérieux une mesure, soit $\cos(2\pi \frac{\ell}{L}) = 0,6$, i.e. $\ell > \ell_{min} = 0,15L$ (mais ℓ largement inférieure à L , la proba étant périodique!)

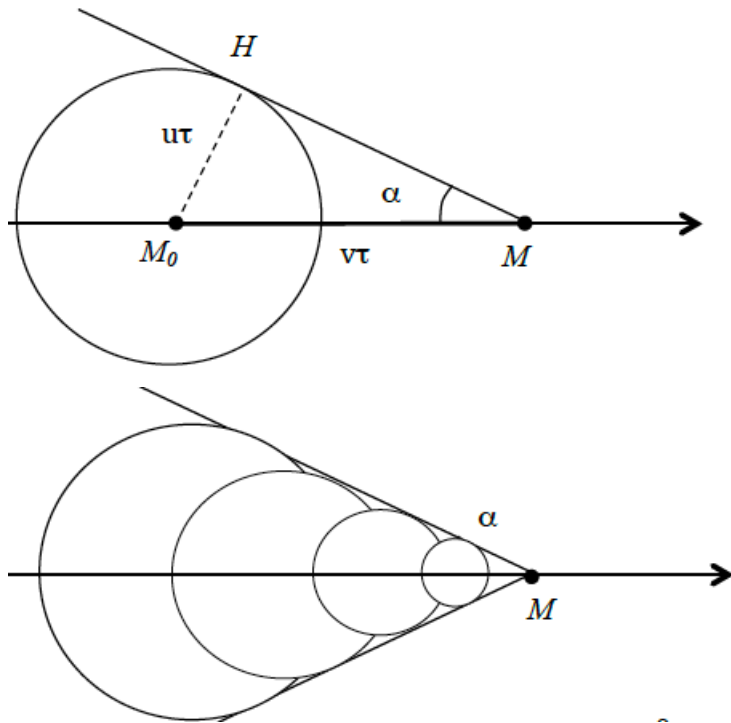
11. Pour $E = 4$ MeV et $\mathcal{P} = L/E$ de 36 km.MeV⁻¹, $L = \mathcal{P}E = 144$ km. D'où $\ell_{min} = 21$ km.

Sur la figure 2, on voit que toutes expériences sauf l'équipe de Super-Kamiokande au Japon, ont utilisé des valeurs de ℓ beaucoup trop petites, c'est donc normal que les expérimentateurs aient trouvé une valeur de 1 comme indiqué sur le graphe car $\ell \ll \ell_{min}$. En revanche l'expérience "Kamland" fournit un résultat probant qui met en évidence la (faible) différence de masse des neutrinos en fonction de leur saveur.

12. La distance Soleil-Terre est très grande devant L , et en fonction de leur région d'émission, varie de plusieurs ordres de grandeur fois L . On attend donc une valeur moyenne du cos égale à 0, soit $P_e = \frac{1}{2}$.

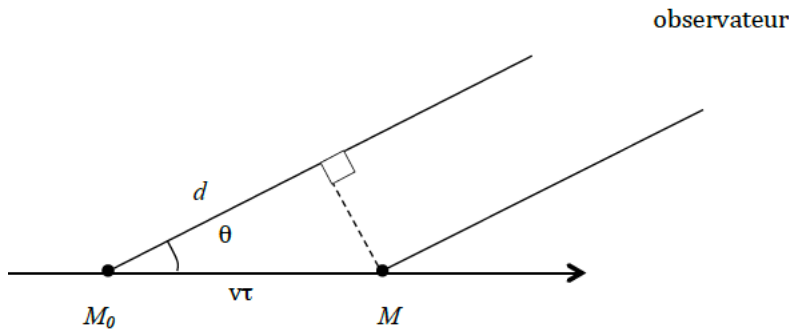
13. Soit M la position de la particule à la date t . L'onde émise à $t - \tau$ depuis la position M_0 telle que $\overline{M_0 M} = v\tau$, atteint à t la sphère de rayon $u\tau$ centrée sur M_0 . Cette onde se trouve ainsi à t à l'intérieur d'un cône d'angle α tel que

$$\sin \alpha = \frac{M_0 H}{M_0 M} = \frac{u\tau}{v\tau} \text{ est indépendant de } \tau.$$



$$\sin \alpha = \arcsin \frac{u}{v}$$

14. L'onde émise en $t - \tau$ a un temps de parcours supérieur de $\tau' = \frac{d \cos \theta}{u}$ à celui de l'onde émise à t .



Les deux ondes arrivent en phase pour $\tau = \tau'$, soit

$$\cos \theta = \frac{u}{v}$$

15. Les ondes émises interfèrent constructivement dans les directions θ avec $\cos \theta = \frac{u}{v}$, correspondant aux normales au cône de la question 13. On retrouve que la direction de propagation est normale à l'enveloppe des surfaces d'onde, c'est-à-dire le théorème de Malus.

16. $v \simeq c$ et $u = c/n$. D'où

$$\cos \theta = 1/n$$

A.N. : $\cos \theta = \frac{3}{4}$, soit

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

17. Les points d'impact observés correspondent aux intersections des cônes de radiation Tcherenkov d'angle $\alpha = \arcsin(1/n)$, émis par l'électron, et du cylindre. Le sommet du cône correspond à la position de l'électron, et l'axe du cône correspond à la direction de sa trajectoire.

Ces points forment essentiellement sur la figure 3 un anneau.

- L'épaisseur de cet anneau est due au fait que le rayonnement est créé pour différentes positions de l'électron sur sa trajectoire. Cependant il apparaît que ces impacts (sur un même rayon vecteur) sont de même couleur, donc créés à des dates d'écart inférieur à 5 ns, ce qui correspond à la durée maximale pendant laquelle l'électron circule avant d'être freiné par l'eau à une vitesse inférieure à celle de la lumière dans l'eau.

- le cône est émis vers l'arrière de la trajectoire, donc l'électron se déplace de la partie du cylindre correspondant à la partie basse de la figure 3, vers la partie haute. L'angle α étant constant, le cône "initial" (dont le sommet est la position initiale de l'électron lorsqu'il est créé) correspond au rayon intérieur de l'anneau.

- à partir des écarts τ de dates des impacts, on connaît la différence de longueur de cône parcourue par la lumière avant d'atteindre ces points d'impact $c\tau/n$, ce qui permet de connaître la position relative du cône d'angle α et du cylindre. Ainsi on voit que les points d'impact les plus précoces sont sur la paroi latérale du cylindre, ils correspondent aux points les plus proches du sommet du cône.

18. À fortes vitesses de la particule, $\theta \rightarrow 0,05$ rad. Il s'en déduit $n = 1/\cos\theta \simeq 1 + \theta^2/2$. Soit

$$n - 1 \simeq \theta^2/2 = 1,25.10^{-3}$$

Pour l'air $n - 1 \simeq 3.10^{-4}$

Pour l'eau $n - 1 \simeq 3.10^{-1}$ Le milieu est un gaz d'indice un peu supérieur à l'air.

Pour avoir un effet Cerenkov, il faut $v > u = c/n$, soit

$$v > c(1 - (n - 1)) = 0,9997c$$

19. $P(\omega)$ est en W.s, en Joule : $[P(\omega)] = M.L^2.T^{-2}$. On peut remarquer directement que c'est aussi le cas de $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ où $[r] = L$. Donc comme $[\frac{c}{\omega}] = L$:

$$P(\omega) = \mathcal{A} \frac{q^2 \omega}{\epsilon_0 c}, \text{ avec } \mathcal{A} \text{ sans dimension}$$

20. $|P(\lambda) d\lambda| = |P(\omega) d\omega| \implies P(\lambda) = P(\omega) \frac{2\pi c}{\lambda^2} = \mathcal{A} \frac{q^2 \omega}{\epsilon_0 c} \frac{2\pi c}{\lambda^2}$, soit

$$P(\lambda) = \mathcal{A} \frac{q^2}{\epsilon_0} \frac{4\pi^2 c}{\lambda^3}$$

$P(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ . La puissance rayonnée est plus importante pour λ petit, le rayonnement visible apparaît bleu.

21. La particule parcourt la distance D en une durée $\tau = D/v$. Pendant τ , l'énergie rayonnée entre λ et $\lambda + d\lambda$ est $\delta W = P(\lambda) \cdot \tau d\lambda$ et correspond à un nombre de photons $\delta N_\lambda = \frac{\delta W}{h\nu} = \frac{\lambda \delta W}{hc}$.

$$\delta N_\lambda = P(\lambda) d\lambda \frac{D}{v} \frac{\lambda}{hc}$$

Le nombre de photons émis de longueur d'onde comprise entre λ_1 et λ_2 est ainsi :

$$N = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta N_\lambda = \frac{D}{vhc} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P(\lambda) \lambda d\lambda = \mathcal{A} \frac{D}{vhc} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{q^2}{\epsilon_0} \frac{4\pi^2 c}{\lambda^2} d\lambda, \text{ d'où}$$

$$N = \mathcal{A} \frac{D 4\pi^2 q^2}{v h \epsilon_0} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

22. $\mathcal{A} = 1; N = \frac{D4\pi^2 q^2}{vh\epsilon_0} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$. Avec $v \simeq c$ et $q^2 = e^2$,

$$N = \frac{D2\pi e^2}{hc\epsilon_0} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

A.N. : $N = \pi \cdot 10^5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \simeq 4 \cdot 10^4$

23. \vec{v} étant la vitesse de la particule, \vec{j} dépend a priori de $\vec{r} - \vec{v}t$.

24. Le champ (en $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$) doit varier comme la source du champ (en $\vec{r} - \vec{v}t$), donc $\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t)$ doit varier $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$, soit par identification

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$$

25.

$$\omega = ku$$

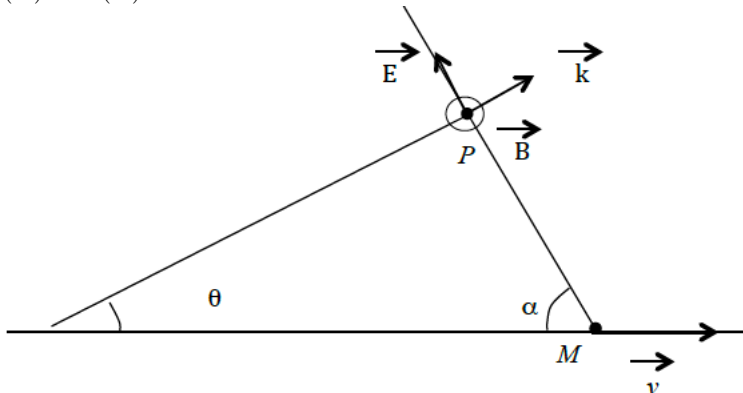
26. D'après 24 et 25, $\vec{k} \cdot \vec{v} = ku$, soit avec $\theta = \widehat{\vec{k}, \vec{v}}$

$\cos \theta = \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{kv} = \frac{ku}{kv}$, ce qui donne comme en question 14.

$$\cos \theta = \frac{u}{v}$$

27. Les vecteurs \vec{j} et \vec{v} sont parallèles. En P , le champ $\vec{B}(P)$ est perpendiculaire au plan Π de symétrie de la distribution de courant passant par P et l'axe (Oz) de la trajectoire de la particule.

$$\vec{B}(P) = B(P)\vec{n}.$$



Pour une onde de champ en $\exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$, le champ \vec{E} , dans le milieu diélectrique d'indice n , est perpendiculaire à \vec{k} et \vec{B} . Le champ $\vec{E}(P)$ est donc contenu dans le plan Π contenant P et l'axe de la trajectoire de la particule, et il est perpendiculaire à \vec{k} .

Le champ \vec{E} est ainsi porté par l'intersection du cône d'angle α (cf question 13) passant par P et du plan $\Pi(P, Oz)$.

Dans un plan contenant l'axe (Oz) , le champ électrique

28. L'analogie en acoustique serait par exemple le cas d'un avion supersonique, de vitesse supérieure à celle du son, produisant une onde de choc dans son "cône de Mach".

Quand la vitesse de la particule tend vers la vitesse de la lumière, $\cos \theta \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$. Le vecteur d'onde est parallèle à la vitesse de la particule et le front d'onde se déplace à la vitesse de la particule.

Différence ?

Merci de transmettre vos remarques et corrections à anne.henriet@gmail.com