ELECTROSTATIQUE

Exercices de cours à savoir faire en électrostatique

1. Champ et potentiel crées par un plan chargé uniformément par application du théorème de Gauss.
2. Champ et potentiel crées par une sphère (sphère creuse, sphère pleine chargée uniformément, sphère pleine chargée non uniformément) par application du théorème de Gauss.
3. Champ et potentiel crées par un fil infini chargé uniformément par application du théorème de Gauss.
4. Champ et potentiel crées par un cylindre infini (cylindre creux, cylindre plein chargé uniformément, cylindre plein chargé non uniformément) par application du théorème de Gauss.
5. Champ crée par un dipôle électrostatique (EM3)

EXERCICE 1

Distribution plane : Modèle de l'atmosphère

Par temps clair, règne à la surface de la Terre, un champ électrostatique vertical descendant, noté $\vec{E}_{sol}$, de l'ordre de $100\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$. Par ailleurs, des études ont mis en évidence l'existence d'une couche conductrice de l'atmosphère, l'ionosphère, qui s'étend à partir (et au-dessus) de l'altitude $h = 70\,\mathrm{km}$. De fait, on modélise l'atmosphère par un condensateur plan dont les armatures, respectivement chargées négativement et positivement, sont la surface de la Terre et la base de l'ionosphère, appelée *électrosphère*.

1. Déterminer le champ électrique régnant en tout point de l'espace compris entre la surface de la Terre et l'électrosphère, ainsi que la densité surfacique de charge au niveau du sol terrestre. En déduire la valeur de la charge Q du condensateur équivalent.
2. Étudier le potentiel dans cette même région. En déduire la différence de potentiel entre la surface de la Terre et l'électrosphère. Commenter.
3. On considère un cas plus réaliste où la charge de l'électrosphère est répartie uniformément entre les altitudes $h_1 = 60\,\mathrm{km}$ et $h_2 = 70\,\mathrm{km}$. Déterminer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace dont l'altitude est comprise entre 0 et h_1. Reprendre les questions précédentes et commenter.

EXERCICE 2

Distribution cylindrique infinie : Bouteille de Leyde

Photographiée en figure 1, la bouteille de Leyde est le premier condensateur, un condensateur formé de deux conducteurs différents :

- des feuilles d'étain froissées contenues dans une bouteille de verre ;
- une enveloppe métallique qui enveloppe le bouteille.

Le verre de la bouteille constitue quant à lui, le diélectrique du condensateur.

1. En vous aidant du schéma donné figure 2 et en sachant que $h = 15\,\mathrm{cm}$, $e = 0.2\,\mathrm{cm}$ et $R = 4\,\mathrm{cm}$, déterminer la capacité d'une bouteille de Leyde.
2. La valeur mesurée est $C = 25\,\mathrm{nF}$. Commenter.

Données : permittivité relative du verre de la bouteille $\varepsilon_r = 2.25$.

EXERCICE 3

Deux expériences d'électrostatique

FIGURE 1 – Exemple de bouteille de Leyde

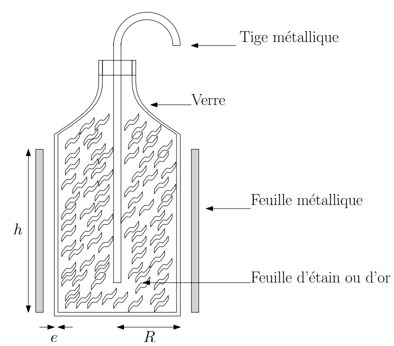


FIGURE 2 – Schéma d'une bouteille de Leyde

Expérience 1

Un barreau de plexiglas est frotté à l'aide d'un chiffon. Sous l'effet du frottement, le barreau se charge positivement et la mesure de cette charge montre qu'il existe une charge maximale Q_{max} portée par le barreau.

- ❑ Pouvez-vous expliquer qualitativement l'existence de cette charge maximale ?
- ❑ Proposer un modèle vous permettant de déterminer l'ordre de grandeur de Q_{max}.
- ❑ Faire une application numérique en proposant des ordres de grandeurs raisonnables.

Expérience 2

Un étudiant décide alors de placer le barreau ainsi chargé au centre d'un solénoïde alimenté par un courant continu I, le barreau étant libre de tourner autour de l'axe du solénoïde (Oz) sans frottements. En changeant rapidement le sens du courant dans le solénoïde, il s'attend à ce que le barreau se mette à tourner. L'expérience montre qu'il n'en n'est rien : le barreau de plexiglas reste immobile.

- ❑ Pourquoi l'étudiant s'attend-il à ce que le barreau tourne ?
- ❑ Pourquoi le barreau ne tourne-t-il pas ?

EXERCICE 4

Disque de Corbino

On considère un anneau cylindrique de métal, d'axe (Oz) , de conductivité γ , de rayon interne R_1, de rayon externe R_2 et de hauteur h .

1. Sa face interne est mise en contact avec une électrode de potentiel V_1 et sa face externe est en contact avec une électrode de potentiel V_2. Déterminer la résistance électrique de l'anneau.

2. On ajoute un champ magnétique externe uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Déterminer la nouvelle résistance du disque.

EXERCICE 5

Distribution sphérique : Énergie de fission

Dans le mécanisme de fission nucléaire, un neutron possédant une énergie cinétique réduite (neutron lent) vient heurter le noyau d'un élément fissile, en l'occurrence un noyau d'uranium 235 (${}^{235}_{92}U$). Sous le choc, ce noyau se décompose en noyaux plus légers en libérant de l'énergie, ainsi qu'un ou deux neutrons nécessaires à la poursuite de la réaction en chaîne.
Selon le modèle dit de la goutte liquide, nous assimilerons le noyau de ${}^{235}_{92}U$ à une sphère de rayon R, de charge volumique uniforme ρ et de charge totale $Q = Ze$

1. Déterminer la densité volumique de charge ρ dans un noyau d'uranium 235. Proposer un ordre de grandeur.
2. La détermination précise du rayon du noyau atomique R se fait en considérant que le volume nucléaire est proportionnel au nombre A de nucléons qu'il contient. Sachant que le rayon d'un nucléon vaut $r_0 = 1.4\,\text{fm}$, déterminer le rayon R d'un noyau d'uranium. En déduire une valeur numérique plus précise pour ρ.
3. Déterminer le champ électrostatique crée en tout point de l'espace par un noyau d'uranium, en déduire l'énergie électrostatique W_E de ce noyau en fonction de r_0, Z, A et e.
   En réalité, les charges constituant le noyau sont réparties de manière discrètes et pour $Z = 1$, l'énergie W_E devrait-être nulle. Pour adapter l'expression de W_E à cette exigence, on remplace Z^2 par $Z(Z-1)$ dans l'expression de W_E.
   Calculer W_E.
4. Afin de déterminer l'énergie dégagée par la réaction de fission, on fait les hypothèses suivantes :
   - On suppose qu'un seul neutron est éjecté (en plus du neutron incident) lors de la fission.
   - On suppose que la fission du noyau de ${}^{235}_{92}U$ produit deux noyaux fils identiques, de charges volumiques ρ comme le noyau père.

   Outre l'énergie cinétique, négligeable, communiquée par le neutron incident, la brisure du noyau requiert une énergie W_c égale à $130\,\text{MeV}$. Cette énergie, prélevée sur la réaction de fission elle-même, sert à vaincre les forces d'attraction entre nucléons responsables de la cohésion du noyau.
   En assimilant également les deux noyaux fils à des gouttes liquides parfaitement sphériques, déterminer l'énergie utilisable W_u par la fission d'un noyau d'uranium 235.

EXERCICE 6

Distribution sphérique : Bulle de savon

Une bulle de savon sphérique est mise au potentiel $V_0 = 100\,\text{V}$.

1. Déterminer la charge Q acquise par la bulle de savon ainsi que le champ électrique crée par la bulle en tous point de l'espace. Faire les applications numériques.
2. On coupe la liaison entre la bulle et le générateur et on perce la bulle. On suppose tout d'abord que le film d'eau savonneuse se transforme alors en une goutte sphérique conservant la même charge totalement répartie en surface. Quel est le rayon de la goutte sphérique ? quel est son potentiel ?
3. On considère maintenant le fractionnement de la goutte en N gouttes identiques de rayon c.
   (a) Exprimer c en fonction de b et N.
   (b) Exprimer la charge q commune aux N gouttes en fonction de Q et N.

(c) Afin de déterminer N, on envisage de déterminer l'énergie totale des N gouttes. Pour cela, on rappelle que l'élasticité de l'eau savonneuse est due à la tension de surface dont l'énergie associée est $E_\gamma = \gamma \times S$ où $\gamma = 7 \times 10^{-2}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ est la tension de surface de l'eau savonneuse et S est l'aire de la surface en contact avec l'air.

- ❑ Exprimer l'énergie de surface E_S totale des N gouttes.
- ❑ Exprimer l'énergie électrostatique E_e des N gouttes.
- ❑ En déduire l'énergie totale des N gouttes ainsi que la valeur de N

EXERCICE 7

Exploitation d'une carte de champ

La figure ci-dessous représente une carte de lignes de champ électrique.

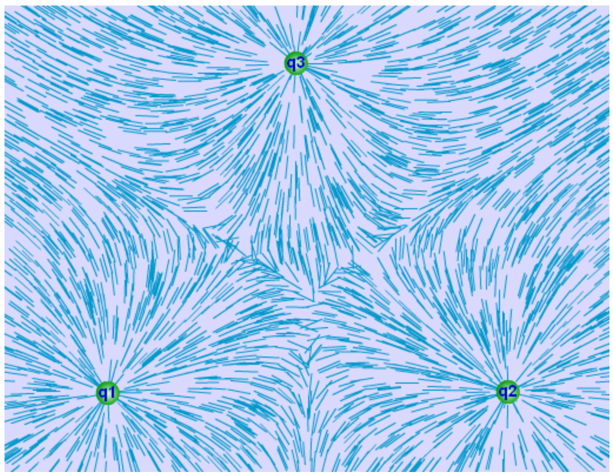


Figure 3 –

1. Que peut-on dire sur les sources supposées ponctuelles de champ ? (nature, valeur, disposition...)
2. Il y a une zone de champ faible au voisinage du centre de la figure. On y cherche une expression du potentiel électrique dans cette zone, en fonction des paramètres décrivant le système, (charge q et distance a), qui soit valable au second ordre près en fonction des coordonnées x, y et z du point considéré (x, y, z, petits devant a) sous la forme :

$$V(M) = V_0 + Ax + By + Cz + Dxy + Eyz + Fzx + Hx^2 + Iy^2 + Jz^2$$

   Parmi les paramètres $V_0, A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J combien peut-on en déterminer indépendamment de q et a ?
3. Déterminez complètement les 10 coefficients de l'expression du potentiel.
4. On lâche une charge positive au voisinage du centre O, quel est son mouvement ? Quel est le mouvement d'une charge négative ?
5. Dans les deux cas, le mouvement des charges n'est pas limité dans l'espace. Pour maintenir les charges dans une zone limitée, on ajoute un champ magnétique uniforme autour de O : précisez ce champ (direction, sens)

EXERCICE 8

Foudroiement indirect

Le document présenté tableau (1) rappelle les consignes de sécurité à respecter lorsque l'on se retrouve pris dans un orage en pleine campagne afin de limiter le risque de foudroiement indirect. Le but de cet exercice est d'essayer de les interpréter.

Recommandation pour limiter les risques de foudroiement indirect ❑ Ne jamais s'abriter sous un arbre, surtout si celui est isolé. ❑ Ne jamais se tenir debout jambes écartées, ni marcher à grandes enjambées. ❑ La meilleure position consiste à s'accroupir sur le sol en gardant les pieds rapprochés au maximum. ❑ Si possible, placer un isolant entre vous et le sol (Ciré...) ou à l'inverse, placer un métal entre vous et le sol (armature de sac à dos...)

TABLE 1 – Recommandations en cas d'orage- Extraits recommandation de la DRDJS

Pour cela, on modélise l'éclaire traversant un arbre par un fil rectiligne vertical semi-infini, parcouru par un courant électrique ascendant d'intensité $I = 30\,\mathrm{kA}$. Cette demi droite prend fin au niveau du sol, où l'on suppose que la densité de courant est radiale comme indiqué figure (4).
Un homme se trouve à la distance moyenne d de l'arbre de façon à ce que ses pieds, placés en P_1 et P_2 vérifient $\overrightarrow{P_1P_2} = p\,\vec{e}_r$ où p est appelé le pas.

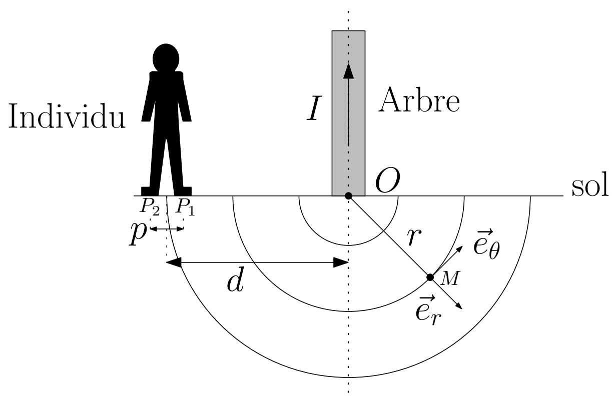


FIGURE 4 – Modélisation d'un éclair traversant un arbre

1. Expliquer qualitativement pourquoi il y a risque d'électrocution indirecte. Comment la distance d intervient-elle ? Comment le pas p intervient-il ?
2. On souhaite déterminer par le calcul la distance minimale d_{min} à laquelle doit se situer l'individu afin qu'il ne soit pas électrocuté.
   - ❑ En utilisant le modèle proposé, déterminer la différence de potentiel entre les deux pieds de la personne, notée U_p, en fonction de p, d, I et σ.
   - ❑ On note R la résistance entre les deux pieds de l'individu et I_{max} l'intensité maximale pouvant traverser l'individu sans risque d'électrocution. Déterminer la distance d_{min} en proposant différentes valeurs de p.
3. Discuter du rôle de l'isolant puis du métal.

Données :
✘ Conductivité du sol : $\sigma = 1.0\,\mathrm{S{\cdot}m^{-1}}$; Résistance R entre les pieds d'un individu : $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$; Intensité maximale admissible : $I_{max} = 100\,\mathrm{mA}$.
✘DRDJS : Direction régionale et départementale de la jeunesse et des sports.

EXERCICE 9

Champ dans un conducteur particulier

Dans un matériau conducteur (plaque), le champ électrostatique vérifie :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{\lambda_L^2}\vec{E}$$

, où λ_L est un constante positive caractéristique du matériau.

1. Quelle est la dimension de λ_L ?
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ à l'intérieur de la plaque.
   La plaque, occupant le demi-espace $x > 0$, est plongée dans un champ électrique stationnaire de la forme :
   $$\vec{E} = E_0\vec{e}_x$$
3. Déterminer le champ électrique à l'intérieur de la plaque. Donner une interprétation physique de λ_L.
4. Calculer la densité de charge dans la plaque.
5. En considérant que λ_L est très inférieure devant les dimensions de la plaque, déterminer la densité de charge surfacique du conducteur. L'exprimer en fonction de E_0.

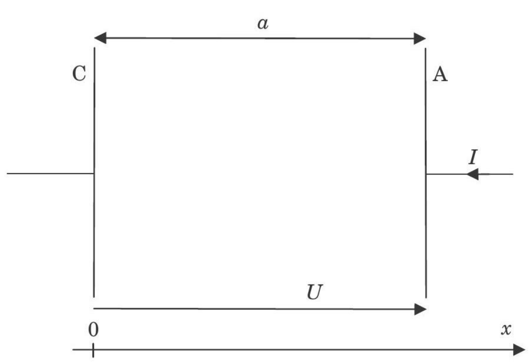
EXERCICE 10

Diode à vide

Deux plaques géométriquement identiques de surface S parallèles, distantes de a sont portées à des potentiels différents V_A (pour l'anode) et V_C (pour la cathode) ($V_A > V_C$). On prendra $V_\mathrm{C} = 0$ (origine des potentiels).

La cathode est chauffée et émet des électrons avec une vitesse suffisamment faible pour la supposer nulle dans la suite. On supposera les électrons non relativistes.

On se place en régime stationnaire en notant I l'intensité du courant défini sur le schéma et toutes les grandeurs utiles au problème seront fonctions de la seule variable x.



1. Après avoir relié la vitesse $v(x)$ d'un électron au potentiel $V(x)$ d'une part et à la densité volumique de charge $\rho(x)$ d'autre part, montrer que le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre
   $$\frac{d^2V}{dx^2} - \alpha V^{-1/2} = 0$$
   dont on cherchera des solutions du type Kx^p.
2. En déduire la caractéristique $I = f(U)$ du composant. Pour $a = 5,0$ mm, $U = 1,0$kV, $S = 1,0$ cm^2, calculer I.
3. Combien de temps met un électron pour atteindre l'anode ?

EXERCICE 11

Solution colloïdale

Une solution contient des particules sphériques (particules colloïdales) de rayon $R \approx 10^{-8}$ à 10^{-6} m, de charge Q ainsi que des ions de charges $\pm e$ considérés ponctuels. Cette solution est appelée solution colloïdale. Soit une particule colloïdale de centre O et soit $V(r)$ le potentiel électrique à la distance r du centre de la particule colloïdale.

1. En considérant le système thermalisé, exprimer les densités volumiques des ions et des cations en fonction de la température du milieu. Dans tout l'exercice, on supposera que $|eV(r)| << k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann.
2. De l'écriture de deux relations entre $V(r)$ et la densité volumique de charges $\rho(r)$, déduire le potentiel électrique $V(r)$ et le champ électrique $\boldsymbol{E}$ autour de la particule colloïdale.
3. Comparer l'interaction entre deux particules colloïdales en l'absence ou en présence d'ions.
4. La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique des particules colloïdales. Montrer qu'un excès d'ions (ajout de sel) est néfaste à cette stabilité.

EXERCICE 12

Distribution plane non uniforme

On considère une distribution de charge surfacique (plan (Oxy)) vérifiant :

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$$

Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrostatique créent en tous points de l'espace.

EXERCICE 13

Champ de gravitation en haut d'une montagne

Calculer le champ de gravitation au sommet d'une montagne de forme conique de hauteur h et de base de rayon R.

MAGNETOSTATIQUE

Exercices de cours à savoir faire en magnétostatique

1. Champ crée par un fil infini (circuit filiforme) parcouru par un courant I par application du théorème d'Ampère.
2. Champ crée par un fil épais infini (distribution volumique de courant) parcouru par un courant I par application du théorème d'Ampère.
3. Champ crée par un solénoïde infini en tout point de l'espace par application du théorème d'Ampère.
4. Champ crée par un bobinage torique en tout point de l'espace par application du théorème d'ampère.
5. Champ crée par une nappe de courant (distribution volumique courant) en tout point de l'espace par application du théorème d'Ampère.

EXERCICE 14

Champ magnétique associé à une distribution volumique de courant

On considère une distribution volumique de courant de la forme :

$$\vec{j}(x) = j_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \vec{e}_y \text{ pour } x > 0$$

$$\vec{j}(x) = \vec{0} \text{ pour } x < 0$$

Déterminer le champ magnétostatique crée en tout point de l'espace.

EXERCICE 15

Distribution de courant associée à un champ magnétique

On considère, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique suivant :

$$\vec{B} = B_0 \left(\frac{r}{\delta}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right) \vec{e}_\theta \text{ pour } 0 < r < \delta$$

$$\vec{B} = 2B_0 \frac{r}{\delta} \text{ pour } x > \delta$$

Déterminer les courants qui sont à l'origine de ce champ magnétique.

EXERCICE 16

Champ crée par un solénoïde

Un solénoïde cylindrique épais, de longueur L, de rayon intérieur R, est constitué par un enroulement jointif de fil sur N couches. Le fil de diamètre a est parcouru par un courant I. On veut exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point M de l'intérieur du solénoïde, dans le modèle du solénoïde infini.

Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par une couche d'enroulement. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$.

1. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par une couche d'enroulement. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$.
2. (a) Déterminer directement le vecteur-densité de courant $\vec{j}$.
   (b) En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer $\vec{B}(M)$.

EXERCICE 17

Champ électromagnétique crée par deux cylindres

Deux cylindres sont parcourus par des densités de courants uniformes telles que $\vec{j}_1 = j\vec{e}_z = -\vec{j}_2$. Les cylindres sont identiques, de rayon R, de longueur $h >> R$ et leurs axes, parallèles à $\vec{e}_z$, sont distants de a avec $a < 2R$.

- ❑ Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ dans la zone commune aux deux cylindres.
- ❑ On considère maintenant que les deux cylindres précédents possèdent des densités de charges volumiques uniformes $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$. Ils sont animés, dans le référentiel du laboratoire, galiléen, d'une vitesse $\vec{V} = v\vec{e}_z$ avec v constante positive. Calculer en tout point de la zone commune aux deux cylindres, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ crées. Commenter.

EXERCICE 18

Câble coaxial

On dispose d'un câble coaxial de 100 m dont la documentation constructeur est donnée tableau (2).

1. Déduire des données constructeur, la permittivité relative du diélectrique. Commenter.
2. Afin de vérifier les données constructeur, on mesure l'inductance propre du câble à l'aide d'un LC mètre. On obtient : $L = 26\,\mu$H.
   - ❑ Quels sont les branchements à réaliser pour effectuer une telle mesure ?
   - ❑ Ce résultat est-il compatible avec les données constructeur ?
3. Afin de déterminer l'expression littérale de L_l, on modélise le câble de la manière suivante : on suppose qu'il est constitué de deux cylindres infinis coaxiaux, de diamètres D et d, parcourus par des courants surfaciques opposés I et $-I$ répartis uniformément et constants.
   - ❑ Déterminer le champ magnétique crée par ce câble en tout point de l'espace.
   - ❑ En déduire la densité d'énergie électromagnétique en tout point de l'espace.
   - ❑ En déduire l'expression de l'inductance par unité de longueur du câble.
   - ❑ Conclure.
4. D'où provient l'atténuation apparaissant dans la documentation constructeur ? quelles en sont les conséquences ?

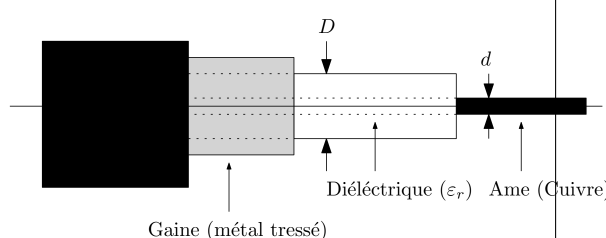
Caractéristiques spécifiques : ❑ Âme en cuivre de diamètre $d = 0.80$ mm ❑ Diélectrique en polyéthylène plein de diamètre extérieur $D = 2.95$ mm ❑ Impédance caractéristique : $Z_c = 50\,\Omega \pm 2\,\Omega$ $\left(Z_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{D}{d}\right)\right)$ ❑ Capacité linéique : $C_l = 100\,\text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$ $\left(C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}\right)$ ❑ Inductance linéique L_l non précisée ❑ Atténuation : 34 dB/100m	

TABLE 2 – Documentation constructeur du câble étudié

EXERCICE 19

Bobinage conique

On enroule un fil de diamètre $2a$ sur un cône de sommet S et de demi-anlge au sommet α. Le fil est enroulé entre deux cercles (inscrits sur le cône) de rayon R_1 et R_2. Il est par couru par un courant d'intensité I.

1. Calculer la résistance de ce fil de conductivité électrique ρ.
2. Calculer le champ magnétique crée par cete enroulement en tout point de l'axe.

EXERCICE 20

Plaque supraconductrice

Dans un matériau supraconducteur (plaque), la densité volumique de courant est liée au potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ par la relation :

$$\overrightarrow{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\overrightarrow{A}$$

, où λ_L est un constante positive caractéristique du matériau.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A}$$

1. Quelle est la dimension de λ_L ?
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur de la plaque.

   La plaque, d'épaisseur $2d$ et de surface suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bord, est plongée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme parallèle à sa surface :

$$\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e}_x$$

3. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur de la plaque en supposant que le champ magnétique à sa surface est toujours $\overrightarrow{B}_0$.
4. Calculer les courants crées par ce champ et en déduire le champ magnétique crée à l'extérieur de la plaque. Conclure.

EXERCICE 21

Champ crée par une spire

On considère une spire d'axe (OZ), de rayon R, parcourue par un courant I.

1. Justifier que le champ crée par cette spire en un point de son axe est porté par cet axe.

   Pour la suite, on donne l'expression de ce champ :

$$\overrightarrow{B}_{spire} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\,\overrightarrow{u}_z$$

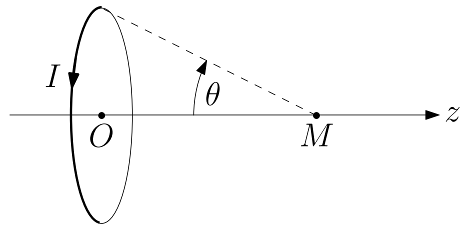


FIGURE 5 –

2. Déterminer le champ magnétique en un point au voisinage de l'axe.