Correction sismographe

- Le bobinage étant en circuit ouvert, aucune force de Laplace n'agit sur lui. La tension $u(t)$ relevée est aussi égale à la force électromotrice induite. Il n'est pas possible de calculer le flux du champ magnétique à travers la bobine, ce champ n'étant pas connu en tout point, mais seulement aux bords d'une surface s'appuyant sur les spires de la bobine. Ainsi, le calcul de la f e m doit-il se baser sur la relation de conversion électromécanique entre puissance des forces de Laplace et puissance de la f e m induite : $\mathscr{P}_L = -e\,i$. Supposons donc le circuit fermé, et calculons la force de Laplace agissant sur le bobinage :

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobinage}} i(t)\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = -i(t)LB\vec{e}_z$$

  où L est la longueur du bobinage.
  Sachant que la vitesse du bobinage par rapport à l'aimant est $-\dot{z}$ (le bobinage est solidaire du bâti et l'aimant a une vitesse $\dot{z}$ dans le référentiel du bâti), la puissance des forces de Laplace vaut :

$$\mathscr{P}_L = -\dot{z}F_L = i(t)LB\dot{z}$$

  On a donc : $u(t) = e(t) = -\dfrac{\mathscr{P}_L}{i(t)} = \dfrac{F_l\,\dot{z}}{i(t)} = -LB\dot{z}$
- Pour relier $u(t)$ aux vibrations du sol, on applique la relation fondamentale de la dynamique à l'aimant dans le référentiel du bâti (lié au sol). Le bilan des actions mécaniques agissant sur l'aimant donne :
  - le poids de l'aimant $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$,
  - la force de rappel élastique $\vec{F}_e = k\,(l - l_0)\,\vec{e}_z$ où $l = l_{eq} - z(t)$, $z(t)$ étant compté à partir de la position d'équilibre,
  - la force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$,
  - la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{sol} = -m\dfrac{\mathrm{d}^2 z_{sol}}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z$.
- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'aimant donne :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = k\left(l_{eq} - z(t) - l_0\right) - mg - \lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - m\frac{\mathrm{d}^2 z_{sol}}{\mathrm{d}t^2}$$

  Sachant qu'à l'équilibre, on a : $k\left(l_{eq} - l_0\right) - mg = 0$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z(t) = -\frac{\mathrm{d}^2 z_{sol}}{\mathrm{d}t^2}$$

  où $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{\lambda}$.
- On se place en régime sinusoïdal forcé et on adopte la représentation complexe.
  On note $\underline{Z}_{sol} = Z_m$, $\underline{V}_{sol} = \mathrm{j}\omega\underline{Z}_{sol} = \mathrm{j}\omega Z_m$, $\underline{Z} = Z\exp(\mathrm{j}\phi_z)$ et $\underline{U} = U\exp(\mathrm{j}\phi_u)$.
  L'équation différentielle précédente donne :

$$\underline{Z}\left(-\omega^2 + \frac{\mathrm{j}\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = -\mathrm{j}\omega\underline{V}_{sol}$$

on a :

$$\underline{U} = -LB\left(\mathrm{j}\omega\underline{Z}\right)$$

On en déduit la fonction de transfert demandée :

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}}{\underline{V}_{sol}} = \frac{-LB\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{\mathrm{j}\omega\omega_0}{Q}}$$

C'est bien un filtre passe-haut de pulsation propre ω_0, facteur de qualité Q.

✘ Pour que le sismographe reproduise le plus fidèlement les vibrations du sol, il faut :

- un facteur de qualité assez modéré pour éviter les phénomènes de résonance : $Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- un facteur de qualité suffisamment grand pour que, au delà de la pulsation propre ω_0, la fonction transfert soit constante (égale à $-LB$).

C'est pour cela qu'on choisit habituellement $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

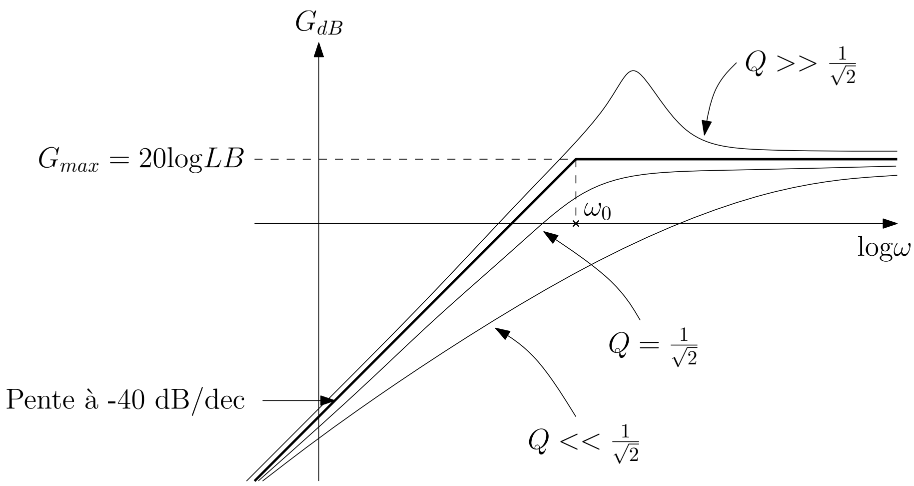

Figure 1