

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

À PROPOS DE HEINRICH OLBERS

L'astronome allemand HEINRICH W. M. OLBERS (1758—1840) découvrit les astéroïdes Pallas et Vesta en 1802 et en 1807 ; en 1831, il réalisa la première observation de la comète qui porte son nom (13P/Olbers). Les caractéristiques orbitales de cette comète ont été déterminées initialement par C. F. GAUSS et F. BESSEL. Elle a été observée pour la dernière fois lors de son passage au périhélie (distance minimale au Soleil) le 10 janvier 1956. Certaines propriétés de cette comète sont examinées dans la Partie I.

OLBERS a aussi étudié le paradoxe qui porte aujourd'hui son nom : si l'univers contient une multitude d'étoiles distribuées à peu près régulièrement, un observateur terrestre qui observe le ciel dans une direction arbitraire devrait toujours voir au moins une étoile, aussi lointaine soit-elle ; tout point du ciel devrait donc sembler brillant, de jour comme de nuit. Certains aspects de cette affirmation paradoxale seront discutés dans la partie II.

Les vecteurs sont notés en caractères gras : $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ et leurs normes en italique $\|\mathbf{v}\| = v$, $\|\mathbf{F}\| = F$. Dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, on rappelle que $\mathbf{grad} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$. On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ la dérivée d'une fonction $x(t)$.

I. — La comète 13P/Olbers

Les parties I.A et I.B de ce problème peuvent être abordées indépendamment.

I.A. — Mouvements cométaires

On étudie dans cette partie le mouvement d'un corps ponctuel M de masse m , soumis à l'action d'un centre attracteur fixe à l'origine O des coordonnées d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On posera $r = \|\mathbf{OM}\|$. L'action de ce centre attracteur est décrite par une force unique $\mathbf{F} = -m \cdot \mathbf{grad} U(r)$, où U est une fonction supposée connue. On note aussi $\mathbf{v}$ la vitesse de M dans $\mathcal{R}$, $\mathbf{L}_O = m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{v}$, $L = \|\mathbf{L}_O\| > 0$ et $C = L/m$

❑ 1 — Montrer que le mouvement de M est plan.

On choisira d'appeler (Oxy) ce plan, orienté par la convention $\mathbf{L}_O = L\mathbf{e}_z$; l'étude du mouvement de M dans (Oxy) s'effectuera en coordonnées polaires (r, φ) .

❑ 2 — On note $E = m\varepsilon$ l'énergie mécanique de M . Exprimer ε en fonction de r , C , $\dot{r}$ et $U(r)$.

Le point M est en fait le centre d'une comète sphérique et homogène se déplaçant dans le champ de gravitation du Soleil (de masse $M_\odot$). Pour tout le reste de la partie I.A, on adopte l'expression $U(r) = -K/r$ où K est une constante, et l'on se place dans le référentiel supposée galiléen dans lequel le Soleil est fixe, homogène et sphérique. De plus, on néglige l'influence des tous les autres corps du système solaire.

❑ 3 — Exprimer K en fonction de la constante de la gravitation universelle $\mathcal{G}$ et de la masse du Soleil $M_\odot$.

❑ 4 — À quelle condition sur ε le mouvement de M vérifie-t-il $r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$ avec $r_{\min} \neq r_{\max}$? Les constantes $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont respectivement appelées périhélie et aphélie de la trajectoire.

On suppose désormais que la condition de la question 4 est vérifiée. L'origine des instants ($t = 0$) et des angles polaires ($\varphi = 0$) sera choisie de sorte que $r(t = 0) = r_{\min}$, $\varphi(t = 0) = 0$.

❑ 5 — Exprimer ε et C en fonction de K , $r_{\min}$ et $r_{\max}$ puis en fonction de K , $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$ et $p = \frac{r_{\max} r_{\min}}{a}$.

❑ 6 — Quelle est, sans démonstration, la nature de la trajectoire de M ? Indiquer en justifiant votre réponse, la signification physique des paramètres a , p et $e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$? Représenter la trajectoire de M en précisant les points et dimensions remarquables.

❑ 7 — On étudie la partie de la trajectoire pour laquelle $0 < \varphi < \pi$. Quel est alors le signe de $\dot{r}$? Exprimer $\dot{r}$ en fonction de ε , K , C et r . Montrer que la durée τ de parcours de $r_{\min}$ à $r(\varphi)$ le long de cette trajectoire s'écrit

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \frac{r}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} dr$$

❑ 8 — On effectue le changement de variable $r = a(1 - e \cos \xi)$. L'angle ξ est appelé *anomalie excentrique*. Exprimer la durée τ du trajet du mobile M depuis l'instant initial jusqu'à sa position actuelle repérée par ξ , en fonction de ξ , e , a et K puis de ξ , e et de la période T du mouvement de M . Quel est le nom de la relation qui lie T , K et a ?

On considère que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire, de rayon $a_0 = 1$ UA (unité astronomique) et de période $T_0 = 1$ année = 365,25 jours. Les caractéristiques orbitales, assez stables, de la comète 13P/Olbers sont les suivantes : excentricité $e = 0,930$; distance au Soleil au périhélie $r_{\min} = 1,18$ UA. On admettra que les relations $\tau(\xi)$ et $r(\xi)$ se généralisent à tout point de la trajectoire de cette comète.

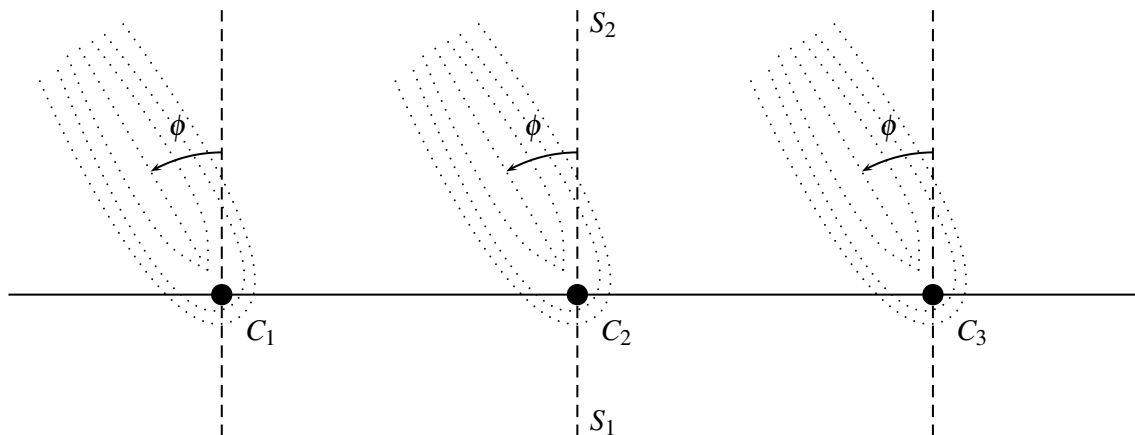
❑ 9 — À quelle date la comète reviendra-t-elle pour la prochaine fois au périhélie? À quelle date la comète se trouvera-t-elle la prochaine fois à la distance $r = 26,06$ UA du Soleil?



Comète Ikeya-Zhang photographiée en 2002 à l'observatoire de Haute-Provence.

I.B. — La queue de la comète

En 1811, OLBERS proposa pour la première fois une théorie quantitative pour expliquer la formation de la queue des comètes, en imaginant que les particules qui la composent sont soumises à une force répulsive d'origine électrique variant comme le carré de l'inverse de la distance au Soleil. On connaît aujourd'hui le mécanisme de formation de la queue de la comète, en particulier si elle est formée de poussières solides.



Les poussières sont entraînées par un flux de particules (le vent solaire) émises par le Soleil et se déplaçant à une vitesse de l'ordre de $400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. On étudie pour simplifier (cf. ci-dessus) une comète se déplaçant en ligne droite à la vitesse de $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; la droite en traits pleins désigne la trajectoire de la comète, et les traits pointillés la direction du vent solaire.

❑ 10 — En justifiant votre réponse, indiquer si le Soleil est disposé du côté S_1 ou du côté S_2 sur la figure ci-dessus.

❑ 11 — En justifiant tout autant la réponse et sur cette même figure, la comète se déplace-t-elle dans le sens $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$ ou dans le sens $C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$? Calculer l'angle ϕ entre la direction Soleil-comète et la direction moyenne de la queue de la comète.

FIN DE LA PARTIE I

COMPOSITION DE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Pompe à chaleur

La pompe à chaleur est un dispositif qui, en mode "chauffage" puise l'énergie thermique dans l'air, dans le sol ou dans l'eau des nappes phréatiques, pour la transférer vers le local à réchauffer. Elle est constituée d'un circuit fermé dans lequel circule un fluide caloporteur à l'état liquide, gazeux ou biphasé selon les éléments qu'il traverse. La circulation se fait en régime permanent ; on néglige les variations d'énergies cinétique et de pesanteur.

Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes et traitent successivement de la thermodynamique de la pompe à chaleur, d'une étude mécanique du compresseur et de la régulation thermique de l'installation.

1 Thermodynamique de la pompe à chaleur

1.1 Diagramme de Mollier

Le diagramme de Mollier (figure 1) représente le logarithme de la pression p en fonction de l'enthalpie massique h du fluide caloporteur et permet ainsi de représenter l'évolution de l'état thermodynamique du fluide au cours du cycle de la pompe à chaleur.

1. Montrer qu'à pression constante, la température T est une fonction croissante de h . Est-elle strictement croissante ?

2. Comment lit-on sur ce diagramme ce qui se nommait autrefois la *chaleur latente massique de vaporisation* à la pression p ?

3. Cette question concerne les courbes isothermes dans le diagramme de Mollier.

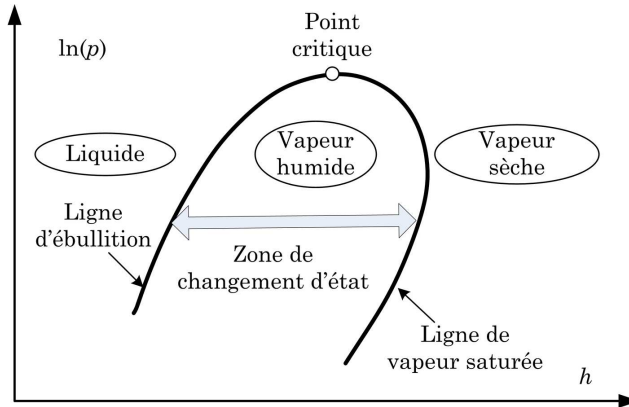


FIG. 1: *Diagramme de Mollier simplifié.*

a) Quelle est a priori leur allure pour la phase liquide, supposée incompressible et indilatable ?

b) Quelle est a priori leur allure pour la phase gazeuse, modélisée comme un gaz parfait ?

c) Quelle est a priori leur allure dans la zone de changement d'état ?

4. Rappeler l'expression de la différentielle de l'enthalpie massique h , considérée comme fonction de l'entropie massique s et de la pression p . On notera v le volume massique.

5. Montrer que, dans le diagramme de Mollier, la pente des courbes isentropiques est positive.

6. Montrer que, sur une courbe isenthalpique du diagramme de Mollier, l'entropie est une fonction décroissante de la pression.

7. On note h_A et h_B les enthalpies massiques du fluide aux points A et B du circuit. Le fluide reçoit d'une part le travail massique utile, fourni par le compresseur, w (et qui ne comprend donc pas le travail des forces de pression nécessaire pour faire entrer et sortir le fluide du volume de contrôle), d'autre part l'énergie thermique q . Montrer que $h_B - h_A = w + q$.

1.2 Cycle de la pompe à chaleur

Le cycle de la pompe à chaleur se compose de quatre étapes (figure 2), en dehors desquelles les échanges thermiques ou mécaniques sont supposés nuls :

- *Compression* : le gaz subit une compression adiabatique et réversible qui l'amène de l'état ① (p_1, T_1) à l'état ② (p_2, T_2) . On note w le travail massique reçu par le fluide.
- *Condensation* : le gaz se liquéfie totalement à pression constante p_2 jusqu'à la température T_3 . Il cède de l'énergie à la source chaude, et l'on note $q_{23} < 0$ l'énergie massique échangée.
- *Détente* : le fluide traverse un tuyau indéformable et ne permettant pas les échanges thermiques. La pression du fluide redescend jusqu'à p_1 et sa température vaut alors T_4 .

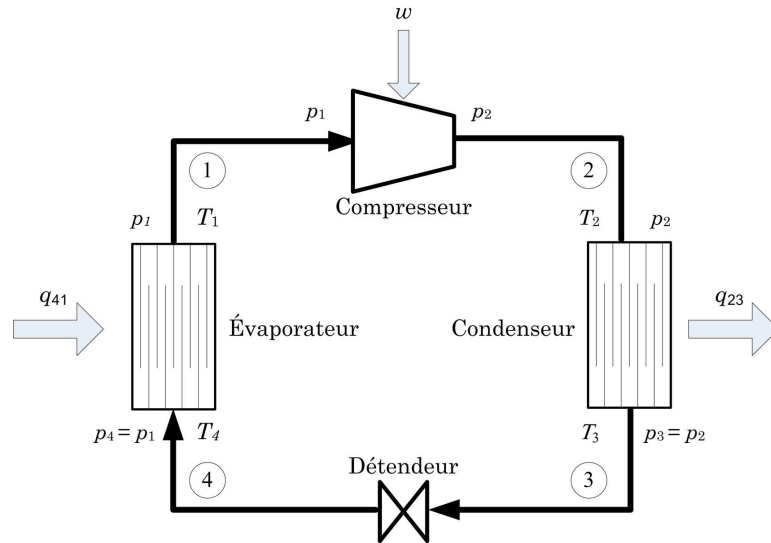


FIG. 2: Cycle frigorifique d'une pompe à chaleur ; les flèches épaisses indiquent le sens des transferts énergétiques.

- *Évaporation* : le liquide s'évapore totalement à pression constante p_1 jusqu'à la température T_1 . Il reçoit l'énergie massique $q_{41} > 0$ de la source froide.

8. Montrer que la phase de détente est isenthalpique.

9. Représenter sur un diagramme de Mollier ($\ln p, h$) les quatre étapes du cycle, ainsi que les quantités q_{23} , q_{41} et w .

10. Quelle est relation liant les quantités q_{23} , q_{41} et w ? Représenter ces quantités sur le schéma de la question 9.

11. Justifier la définition de l'efficacité de la pompe à chaleur $\eta = -q_{23}/w$ et montrer que $\eta > 1$.

12. Le Document Réponse représente le diagramme de Mollier d'un fluide caloporteur courant. Dans la perspective de vos réponses à la question 3, la phase liquide y apparaît-elle incompressible et indilatable ? La phase gazeuse y apparaît-elle comme un gaz parfait ?

13. On donne $p_1 = 0,3 \text{ MPa}$, $p_2 = 1 \text{ MPa}$, $T_1 = 5^\circ\text{C}$ et $T_3 = 0^\circ\text{C}$. Représenter le cycle correspondant dans le Document Réponse, à rendre avec votre copie. Pour chacun des points ① à ④ du cycle, indiquer dans un tableau les valeurs numériques respectives de l'enthalpie massique, la pression et la température. Indiquer aussi l'état du fluide en chacun de ces points.

14. À partir du diagramme de Mollier, estimer numériquement l'efficacité de la pompe à chaleur. Comparer la valeur trouvée à celle qui correspondrait à un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures.

15. Calculer le débit massique du fluide permettant d'assurer une puissance de chauffage de 4 kW.

1.3 Cycle du compresseur

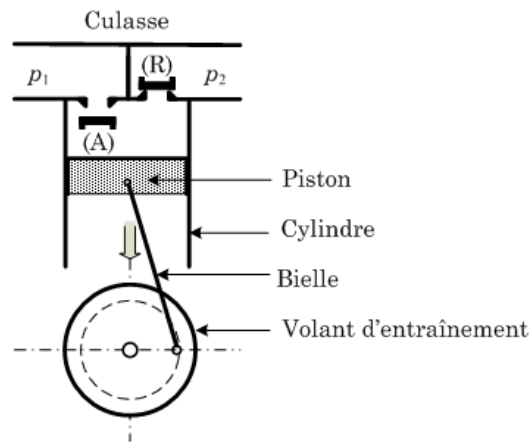


FIG. 3: Schéma de principe d'un compresseur (ici, en phase d'aspiration). Les éléments constitutifs en sont le cylindre, le piston, le clapet d'aspiration (A), le clapet de refoulement (R), la bielle et le volant.

Le compresseur, supposé parfaitement calorifugé, assure la circulation du fluide caloporteur entre les circuits basse pression et haute pression (figure 3). Le cycle du compresseur, supposé réversible, s'effectue en trois temps :

- *Aspiration* : Le clapet (A) est ouvert et le clapet (R) fermé. Le piston, de section S , descend, le fluide pénètre dans le cylindre.
- *Compression* : Les deux clapets sont fermés. Le piston monte. La pression du fluide augmente.
- *Refoulement* : Lorsque la pression dans le cylindre atteint la pression p_2 , (R) s'ouvre et le fluide est évacué sous la pression p_2 , jusqu'au moment où le piston atteint la fin de sa course. On suppose alors qu'il n'y a plus de fluide dans le cylindre (le volume dit *mort* est nul).

Puis, le clapet de refoulement se ferme et un nouveau cycle commence.

On suppose que la fermeture de (R), l'ouverture de (A) et la chute de la pression de p_2 à p_1 sont instantanées et simultanées.

16. En notant v_1 et v_2 les volumes massiques au début et à la fin de la phase de compression, représenter dans un diagramme (p, v) les trois phases de fonctionnement du compresseur.

17. Comment détermine-t-on, sur ce diagramme, le travail massique fourni au cours d'un cycle ?

18. La phase de compression est isentropique ; le fluide est considéré comme un gaz parfait dont les capacités calorifiques massiques isobare c_p et isochore c_v sont constantes. Déterminer

le travail reçu par ce fluide pour un aller-retour du piston en fonction de p_1 , v_1 , p_2 , v_2 et de $\gamma = c_p/c_v$.

19. On donne $p_1 = 0,3$ MPa, $p_2 = 1$ MPa, $T_1 = 5^\circ$ C et $\gamma = c_p/c_v = 1,12$. Calculer T_2 . Comparer avec la valeur déterminée graphiquement à la question **13**.