

# Épreuve ENS Lyon PC 2020, partie physique

## Ondes transverses le long d'une corde sous tension

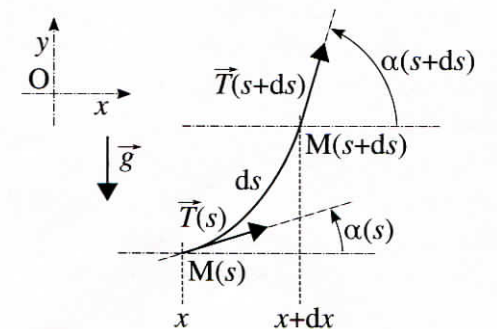
Pour ce problème vous trouverez deux versions légèrement différentes (l'une en Latex l'autre en Word) que nous avons composées et relues à deux. Il reste sans doute des coquilles...si vous les trouvez merci de nous les indiquer pour que nous les corrigions (severine@mensch.fr et pchoche2020@gmail.com)

**Remarques préliminaires :** la partie 1.1 est assez classique, la partie 1.2 esquisse une solution utilisant la mécanique analytique et les multiplicateurs de Lagrange sans vraiment le dire ni aller au bout...La partie 3 est peu guidée, avec une exploitation graphique chronophage. En rouge, quelques remarques ou interrogations.

### 1 Étude de l'équilibre d'une corde suspendue en deux points

#### 1.1 Approche mécanique

1. A l'équilibre dans le référentiel d'étude, galiléen, pour la portion de corde de longueur  $ds$  comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , le principe fondamental de la dynamique s'écrit en projection sur l'axe  $(Ox)$



$T_x(s + ds) = T_x(s)$  avec  $T_x(s) = T \cos \alpha(s)$  où  $T$  est la norme de la force d'où

$$T(s) = \frac{A}{\cos \alpha(s)} \text{ avec } A = \text{cste}$$

2. En projection sur  $(Oy)$ , où le poids intervient, l'équilibre se traduit par

$$\mu ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 = T_y(s + ds) - T_y(s) - \mu g ds$$

$$\text{avec } T_y(s) = T(s) \sin \alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \sin \alpha = A \tan \alpha$$

d'où

$$A \frac{d}{ds} \tan \alpha = \mu g$$

3. On peut séparer les variables de cette équation et intégrer sur toute la longueur :

$$\int_A^B d(\tan \alpha) = \frac{\mu g}{A} \int_A^B ds \text{ soit, avec } \alpha_A = -\alpha_B \text{ par symétrie}$$

$$2 \tan \alpha_B = \frac{\mu g}{A} L \text{ d'où finalement}$$

$$A = \frac{\mu g L}{2 \tan \alpha_B}$$

4. La fonction  $f$  est définie par  $y = f(x)$  sur la corde donc  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \tan \alpha &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \times \frac{dx}{ds} && \text{dérivation composée} \\ &= f''(y) \times \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(y)}} && \text{relation rapellée par l'énoncé} \\ &= \frac{\mu g}{A} \end{aligned}$$

d'où

$$f''(y) = k \sqrt{1 + f'^2(y)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\mu g}{A} = \frac{2 \tan \alpha_B}{L}$$

5. On admet, conformément au texte,  $f(x) = \frac{1}{k} \cosh[k(x - b)] + c$

La symétrie du problème permet d'imposer à  $f$  d'être paire, d'où  $b = 0$

et on impose  $f(\pm a) = 0$  d'où  $c = \frac{-1}{k} \cosh ka$

Finalement

$$f(x) = \frac{1}{k} [\cosh(kx) - \cosh(ka)]$$

6. Les paramètres de description dimensionnés du problème sont :

- $a$  et  $L$  de dimension  $L$
- $\mu$  de dimension  $M.L^{-1}$
- $g$  de dimension  $L.T^{-2}$

$\mu$  et  $g$  étant les seuls paramètres où apparaissent respectivement  $M$  et  $T$ .

Par définition  $[k] = L^{-1}$  : il n'y a pas de masse, ce qui exclut que  $k$  dépende de  $\mu$ , et pas de temps, ce qui exclut qu'il dépende de  $g$  :

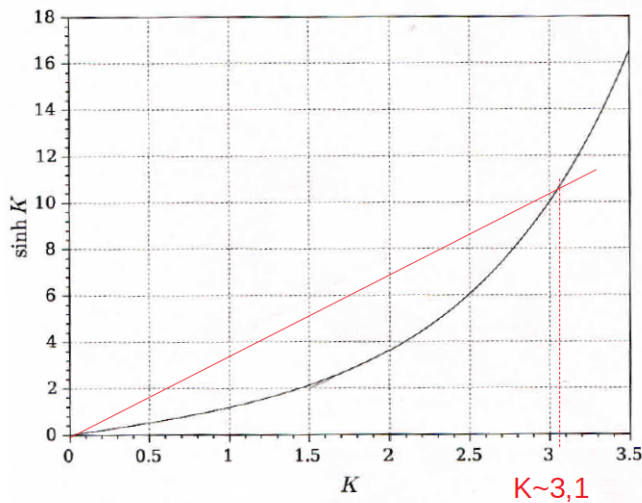
$$k \text{ ne peut dépendre que de } a \text{ et } L$$

7. Il reste à imposer la longueur de la corde :

$$L = \int_A^B ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Une intégration assez simple, mais donnée là aussi dans l'énoncé, conduit au résultat donné à la question 8.

8. La valeur de  $K = ka$  se détermine en résolvant graphiquement la relation  $qK = \sinh K$  avec  $q = \frac{L}{2a} = \frac{20}{6} \sim 3,3$  : on superpose la droite linéaire  $y = 3,3K$  sur le graphe proposé figure (3)



Graphiquement  $K \sim 3,1$  d'où  $k \sim \frac{3,1}{3} \sim 1 \text{ cm}^{-1}$

## 1.2 Approche énergétique

9. La corde n'est soumise qu'à la pesanteur, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  (et non de gravitation comme indiquée dans le texte) et aux forces s'exerçant sur les points A et B où sont fixées les extrémités, forces qui ne travaillent pas (points fixes) : la situation d'équilibre stable est donnée par un minimum de  $E_p$  ; on peut donc prendre  $\Phi = E_p$

10. À un élément de la corde de longueur  $ds$  est associée une énergie potentielle  $dE_p = dm gy = \mu g f(x) ds = \mu g \sqrt{1 + f'^2(x)} f(x) dx$ , à une constante additive près, choisie nulle ici ( $E_p(y = 0) = 0$ )  
d'où, pour la corde complète :

$$E_p = \mu g \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} f(x) dx$$

11. La longueur de la corde doit être retrouvée dans toutes les configurations envisagées, avec  $L = \int_A^B ds$  donc

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

12. pour obtenir une condition ayant les dimensions d'une énergie on multiplie la relation précédente par  $\mu g c$ , avec  $[c] = 1$  on obtient alors une fonction  $\psi_o = E_p - \mu g c (\int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx - L)$  ou encore

$$\psi = \mu g \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'^2(x)} (f(x) - c) dx$$

qu'il s'agit de minimiser pour obtenir la fonction  $f$  cherchée.

Il s'agit d'une méthode de multiplicateur de Lagrange ? les étudiants de PC n'ont jamais entendu parler, ils n'auront vraisemblablement pas compris où les mène ce raisonnement !!

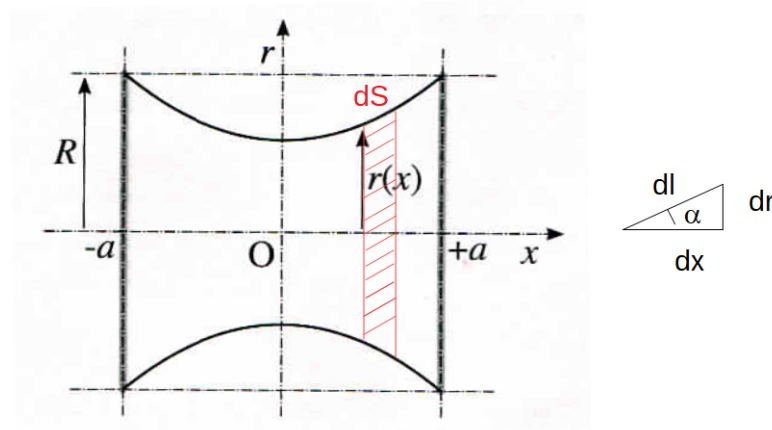
La constante  $c$  étant celle qui intervient dans l'expression (4) on comprend (?) alors qu'elle a pour effet de translater la corde verticalement.

Question un peu déconcertante. Pas sûr que ce soit la réponse attendue...fallait il développer le calcul de minimum de  $\psi$  ???

### 1.3 Analogie avec un film d'eau savonneuse tendu

13. Par définition de la tension superficielle

$E_\gamma = 2 \times \int \gamma dS$  (facteur 2 pour tenir compte des deux interfaces fluide/air du film)



Entre  $r$  et  $r + dr$  la surface découpée sur le film est  $dS = 2\pi r(x) \times dl = 2\pi r(x) \frac{dx}{\cos \alpha}$

avec  $\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}$

d'où

$$E_\gamma = 4\pi\gamma \int_{-a}^a r(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} dx$$

14. Ainsi, chercher la fonction  $r(x)$  qui minimise  $E_\gamma$  pour le film de savon est mathématiquement équivalent à la recherche de la fonction  $f(x)$  qui minimise  $E_p$  pour la corde.

Similitudes et différences entre les deux problèmes :

- les propriétés de parité des fonction  $f(x)$  et  $r(x)$  sont les mêmes (résultent de la symétrie du problème)
- le problème du film est invariant par rotation, avec des contraintes sur les bords du aux anneaux de rayon  $R$  alors que dans le problème de la corde la solution n'est pas modifiée par translation (choix de l'origine de l'axe  $Oy$ , lié à la constante  $c$ ).
- contrairement à la corde, le film est extensible : il n'y a pas de contrainte supplémentaire liée à la longueur  $L$

15. Les remarques précédentes conduisent à chercher  $r(x)$  sous la même forme que  $f(x)$  mais en annulant la constante  $c$  qui disparaît avec la contrainte sur  $L$  et qui sera remplacée par une contrainte due à  $R$ .

$$r(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx)$$

En notant  $R_o = r(x = 0) = 1/k > 0$  on obtient

$$r(x) = R_o \cosh \frac{x}{R_o}$$

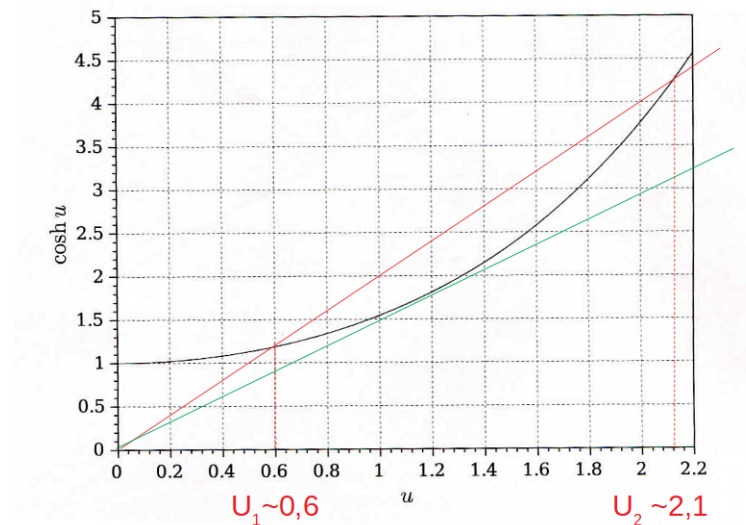
16. Question redondante avec la précédente ?

17. On impose la condition  $r(\pm a) = 0$  :  $R_o \cosh \frac{a}{R_o} = R$  soit  $\cosh \frac{a}{R_o} = \frac{R}{R_o} = \frac{R}{a} \times \frac{a}{R_o}$

Soit, avec les notations du texte :

$$\cosh u = s \times u$$

On trouvera la solution graphiquement à l'intersection de la courbe  $g(u) = \cosh u$  et de la droite  $y = s \times u$  avec numériquement  $s = 2$  (droite rouge sur la figure ci-dessous)



Il y a deux solutions :  $u_1 \sim 0,6$  et  $u_2 \sim 2,1$ .

$R_o = a/u$  détermine le creux de la surface en  $r = 0$  : avec le même écartement  $a$  entre les anneaux, la solution  $u_2$  correspond à un creux plus faible, donc à une aire plus petite → c'est cette solution qui correspond au minimum d'énergie potentielle.

On détermine ainsi  $u \sim 2,1$  d'où

$$R_o = a/u \sim 1/2,1 \sim 0,5 \text{ cm}$$

18. Pour qu'une solution existe il faut que la droite  $y = s \times u$  coupe la courbe du cosh : pour  $s < s_c$  la droite passe en dessous, le film ne sera pas stable. Pour  $s = s_c$  la droite est tangente (droite verte sur le schéma).

$u_c \sim 1,2$  et  $s_c =$  pente de la droite donc  $s_c = \frac{R}{a_c} \sim \frac{1,8}{1,2} \sim 1,5$  d'où

$$a_c \sim \frac{2}{1,5} \sim 1,3 \text{ cm et } R_{oc} = \frac{a_c}{u_c} \sim 1,1 \text{ cm}$$

## 2 Propagation d'ondes transverses le long d'une corde pendante

19. L'approximation des faibles perturbations suppose

$$a \ll \lambda$$

20. Au repos un bilan des forces sur la portion de la corde comprise entre  $z$  et  $z + dz$  conduit à :

$$T(z + dz) - T(z) - \mu g dz = 0$$

$$\text{d'où } \frac{dT}{dz} = \mu g$$

et  $T(z) = \mu g z + C$  où  $C$  est une constante d'intégration qui se détermine en  $z = 0$  où  $T(z = 0) = 0$  : il n'y a plus de corde en dessous.

d'où

$$\boxed{T(z) = \mu g z}$$

remarque :  $T(z)$  s'oppose ainsi au poids de la portion de la corde située sous  $M(z)$ , ce qui serait une autre façon d'établir le résultat.

21. On écrit le principe fondamental de la dynamique pour un élément de longueur  $dz$  situé entre  $z$  et  $z + dz$  en projection sur l'axe  $Oy$ , la position de  $M$  étant donnée par  $y_M = h(x, t)$

$\mu dz \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin \alpha(z + dz) - T(z) \sin \alpha(z)$  où  $\alpha(z)$  est l'angle entre la corde et la direction verticale

Dans l'approximation des petites déformations  $\sin \alpha \sim \tan \alpha$  donc  $\sin \alpha \sim \frac{\partial h}{\partial z}$

d'où, au premier ordre en  $dz$  :

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial h}{\partial z} \right)}$$

22. En développant l'équation précédente avec  $T(z) = \mu g z$  on en déduit :

$$\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \mu g \frac{\partial h}{\partial z}$$

On pourra négliger le deuxième terme à droite si :

$$\mu g \frac{\partial h}{\partial z} \ll \mu g z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

soit en raisonnant en ordre de grandeur, avec comme longueurs caractéristiques pour les variations de  $h$  :  $a$  et pour celle de  $z$  :  $\lambda$

$\frac{a}{\lambda} \ll L \frac{a}{\lambda^2}$  à condition de prendre  $z \sim L$  ce qui ne sera pas vrai au voisinage immédiat de 0...

On obtient alors comme condition

$$\boxed{L \gg \lambda}$$

L'équation de propagation se simplifie alors sous la forme

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}$$

avec  $T = T(z)$ , ce n'est donc pas une équation de d'Alembert classique.

23. On pose  $Z = \sqrt{\frac{z}{L}}$  donc  $\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{Lz}}$  ce qui permet de faire le changement de variable dans l'équation, avec  $H(Z, t) = h(z, t)$  :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial Z} \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \frac{\partial H}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \left( \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{1}{4\sqrt{Lz^3/2}} \frac{\partial H}{\partial Z}$$

avec  $z = LZ^2$  il vient

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{4L^2 Z^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{1}{Z} \frac{\partial H}{\partial Z} \right)$$

et avec  $T = \mu g LZ^2$  l'équation de propagation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\mu g}{4L} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{1}{Z} \frac{\partial H}{\partial Z} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{g}{4L} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{1}{Z} \frac{\partial H}{\partial Z} \right)}$$

24. On cherche à nouveau à simplifier l'équation : en raisonnant comme à la question 22).

On prendra pour ordre de grandeur de  $H$  :  $a$ , et pour  $Z \sim \sqrt{\frac{L}{L}} \sim 1$  (même remarque qu'à la question 22) : ceci n'est pas valable pour  $M$  proche de 0)

Il reste à évaluer l'ordre de grandeur des variations de  $Z$

Par définition  $Z = \sqrt{\frac{z}{\lambda}}$  donc  $dZ = \frac{dz}{2\sqrt{Lz}}$  ce qui permet d'établir pour  $Z$  une variation typique de  $\sim \frac{\lambda}{L}$

alors la simplification est justifiée si :

$$\frac{aL^2}{\lambda^2} \gg \frac{aL}{\lambda} \text{ soit}$$

$$\boxed{L \gg \lambda}$$

On retrouve la même condition qu'en 22)

On obtient alors une forme approchée de l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c_o^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \quad \text{avec} \quad c_o^2 = \frac{g}{4L}}$$

cette fois c'est une équation de d'Alembert classique.

25.  $c_o = \sqrt{\frac{10}{4}} \sim \sqrt{\frac{25}{10}} \sim 1,6s^{-1}$  (à noter que  $c_o$  n'a pas les dimensions d'une vitesse).

26. L'extension temporelle de la perturbation est de l'ordre de  $\tau$ , donc dans l'espace  $(Z, t)$  où elle se propage à  $c_o$  elle s'étalera sur une distance  $Z \sim c_o \tau$  d'où  $\sqrt{\frac{\lambda}{L}} \sim c_o \tau$  où  $\lambda$  est l'extension dans l'espace réel  $z$  :

$$\boxed{\lambda \sim Lc_o^2 \tau^2}$$

la condition  $c_o \tau \ll 1$  permet alors de valider  $\lambda \ll L$  ce qui est l'hypothèse nécessaire pour simplifier l'équation de propagation.

27. La fonction  $H(Z, t)$  vérifie une équation de d'Alembert classique, dont les solutions sont donc des ondes progressives dans le sens des  $Z$  croissants ou décroissants. La perturbation démarrant au point  $z = z_o$  soit  $Z = Z_o$  on obtient donc :

$$H_+(Z, t) = H\left(0, t - \frac{Z - Z_o}{c_o}\right) = h_+(z, t)$$

$$H_-(Z, t) = H(0, t + \frac{Z - Z_o}{c_o}) = h_-(z, t)$$

d'où

$$h_+(z, t) = a \exp \left[ - \frac{\left( t - \left( \sqrt{\frac{z}{L}} - \sqrt{\frac{z_o}{L}} \right) \frac{1}{c_o} \right)^2}{\tau^2} \right]$$

$$h_-(z, t) = a \exp \left[ - \frac{\left( t + \left( \sqrt{\frac{z}{L}} - \sqrt{\frac{z_o}{L}} \right) \frac{1}{c_o} \right)^2}{\tau^2} \right]$$

28. On observe figure 7 une perturbation qui se propage depuis le point de départ vers les  $z$  croissants et décroissants avec une célérité qui augmente quand  $z$  augmente et inversement (cf concavité des courbes) ce qui est cohérent avec une «célérité locale»

$$c(z) = \sqrt{\frac{T(z)}{\mu}} = \sqrt{gz}$$

La perturbation montante rebondit sur le point fixe de la corde où elle est réfléchi.

29. Dans l'espace  $(Z, t)$  les courbes sont des droites : la célérité dans cet espace est constamment  $c_o$
30. On peut déterminer  $c_o$  (**changement de notation  $c_o$  devient  $c'_o$** ) à partir de la figure 8 en mesurant la pente des courbes :

$$\boxed{c'_o \sim \frac{0,5}{0,35} \sim 1,4s^{-1}} \text{ cohérent en ordre de grandeur avec la valeur prévue à la question 25.}$$

### 3 Propagation d'une onde transverse le long d'une corde en défilement

31. Pour déterminer  $T_B + T_C$  on raisonne sur le système fermé  $\Sigma$  constitué de la partie de corde située entre  $B$  et  $C$  à l'instant  $t$ .

Un bilan de quantité de mouvement sur ce système soumis à :

- La tension  $\vec{T}_c$
- La tension  $\vec{T}_B$
- Le poids  $\vec{P} = \mu\pi R\vec{g}$

On suit ce système dans son déplacement entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$d\vec{P} = \mu v dt (\vec{v}_C - \vec{v}_B) = 2\mu v^2 \vec{u}_z dt$$

le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{T}_c + \vec{T}_B - \mu\pi Rg\vec{u}_z$$

d'où

$$\vec{T}_c + \vec{T}_B = (2\mu v^2 + \mu\pi Rg)\vec{u}_z$$

Pour montrer que  $T_B = T_C$  on peut faire un bilan d'énergie entre les instants  $t$  et  $t + dt$  sur le système fermé  $\Sigma$

$dE_c = 0$  puisque la vitesse  $v$  de la corde est constante et uniforme.

Les forces qui s'exercent sur  $\Sigma$  sont :

- La tension  $\vec{T}_c$  dont la puissance est  $P_C = +T_c v$



- La tension  $\vec{T}_B$  dont la puissance est  $P_B = -T_B v$
- Le poids qui est tel que  $dE_p = +2\mu g dz * dz/2$  avec  $dz = v dt$  (même raisonnement que dans un tube en U,  $dz/2$  est la variation de l'altitude du centre de gravité) : ce terme est d'ordre 2 en  $dt$ , on le négligera.
- les forces internes qui ne travaillent pas puisque la corde est inextensible

On obtient ainsi  $T_C v - T_B v = 0$  :

$$T_c = T_B$$

Ces deux résultats conduisent à

$$\vec{T}_c = \vec{T}_B = (\mu v^2 + \frac{1}{2}\mu\pi Rg)\vec{u}_z$$

Dans l'hypothèse  $v^2 \gg Rg$  le résultat se simplifie en :

$$\boxed{\vec{T}_c = \vec{T}_B = \mu v^2 \vec{u}_z}$$

32. Dans le référentiel de la corde l'étude faite dans la partie 2) de la tension à l'équilibre est toujours valable (ce référentiel est galiléen puisque la vitesse est constante). On a ainsi, à l'équilibre :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \mu g$$

qui s'intègre cette fois en  $T(z) = \mu g z + \mu v^2$

qui donne la célérité des ondes dans le référentiel lié à la corde  $c(z) = \sqrt{gz + v^2}$ .

Dans le référentiel fixe, il faut tenir compte du défilement de la corde.

Pour une onde qui se propage dans le sens du défilement la célérité sera

$$c_+ = |c(z) + v| = \sqrt{gz + v^2} + v$$

Pour une onde qui se propage en sens inverse du défilement

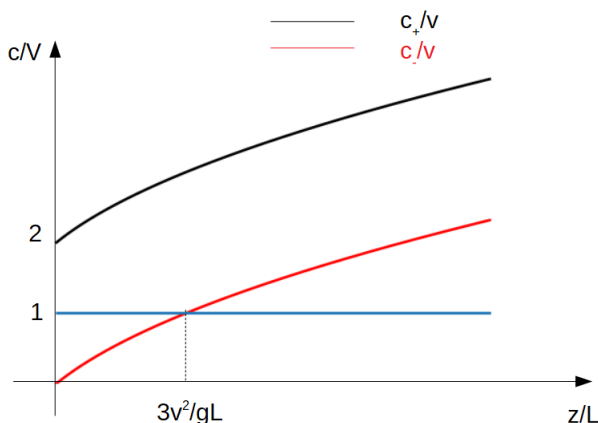
$$c_- = |-c(z) + v| = \sqrt{gz + v^2} - v$$

ces vitesses ne sont pas définies clairement par le texte.. en particulier si on veut exprimer des vitesses algébriques, selon que la corde est montante ou descendante et l'onde progressive ou régressive ou pourrait en fait envisager 4 cas de figures...les résultats ci dessus sont valables en norme

On en déduit

$$\boxed{\frac{c_+(z)}{v} = \sqrt{1 + \frac{gz}{v^2}} + 1}$$

$$\boxed{\frac{c_-(z)}{v} = \sqrt{1 + \frac{gz}{v^2}} - 1}$$



33. Sur la figure 11 on observe que dans le brin AB descendant se propage une onde qui monte, donc à la vitesse  $c_-(z, t) = \sqrt{gz + v^2} - v$  dans le référentiel fixe, cette vitesse croît avec  $z$  (cf concavité de la courbe)

On observe un front descendant dans le brin montant, il s'agit donc là aussi d'une vitesse  $c_-(z, t) = \sqrt{gz + v^2} - v$ , qui décroît dans  $z$  décroît.

L'allure des courbes est donc cohérente avec les expressions établies.

Pour aller plus loin on peut évaluer numériquement des vitesses : choisissons l'instant  $t = 0,7\text{s}$  (7ème image), et déterminons les pentes des tangentes et la position des fronts d'onde :

- la vitesse du front montant du brin descendant est  $c_- \sim \frac{0,9}{8,8 \times 0,7} \sim 0,14\text{ms}^{-1}$

sa position est  $z \sim \frac{3,3}{8,8} \sim 37\text{cm}$

avec  $v = 10\text{m s}^{-1}$  l'expression donne  $c_- \sim 10(1 - \sqrt{1 + \frac{3,7}{100}}) \sim \frac{3,7}{20} \sim 0,18\text{ms}^{-1}$

Compte tenu de la précision des mesures et des calculs ces résultats sont assez cohérents.

- sur le front descendant du brin montant évalué au même instant :  $c_- \sim \frac{1,9}{8,8 \times 0,7} \sim 0,3\text{ms}^{-1}$

sa position est  $z \sim \frac{5,8}{8,8} \sim 65\text{cm}$

avec  $v = 10\text{m s}^{-1}$  l'expression donne  $c_- \sim 10(1 - \sqrt{1 + \frac{6,5}{100}}) \sim \frac{6,5}{20} \sim 0,3\text{ms}^{-1}$

Là aussi les résultats sont cohérents.