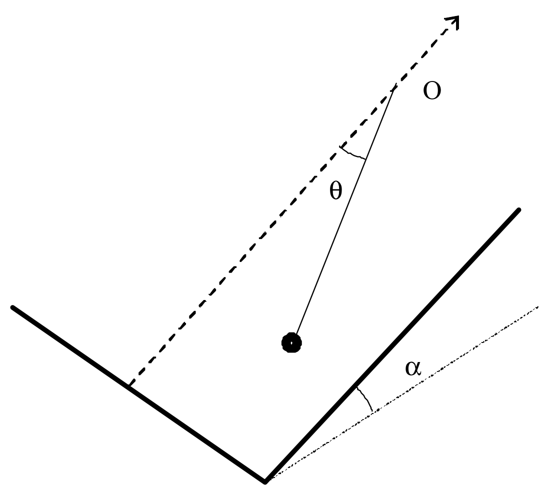
REVISIONS DE MECANIQUE DU POINT.

I. OSCILLATEURS

1. PENDULE SIMPLE INCLINE – FROTTEMENTS SOLIDES(**)

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur ℓ et d'un corps, assimilé à un point matériel, de masse *m*. Le pendule oscille dans un plan incliné, faisant un angle $\alpha = 60°$ avec l'horizontale. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur. Le corps est soumis à un frottement solide de coefficient *f*. On écarte le pendule d'un angle θ_0 et on le lâche sans vitesse initiale.

1) Déterminer la nature du mouvement et proposer deux méthodes pour déterminer la coefficient *f*.
2) On mesure un coefficient $f = 0{,}0605$. Au bout de combien de temps s'arrête le pendule quand $\theta_0 = 20°$, $21°$ ou $22°$?



2. INDIANA JONES (**)

Au cours d'une de ses aventures Indiana Jones se retrouve glissant parfaitement sur un plan horizontal verglacé, lié par un fil inextensible et de masse négligeable à un poteau d'axe vertical. Pour simplifier on assimile le héros à un point matériel A de masse *m*. Indiana tourne autour du poteau à la distance ℓ_0 avec la vitesse $\vec{v}_0$ dans le référentiel lié au plan, supposé galiléen. Notre héros décide, pour se sortir de sa situation, de « remonter » lentement le long du fil.

1) Déterminer la vitesse finale lorsqu'il se retrouve à la distance $\ell_0/2$ du poteau.
2) Faire un bilan d'énergie. Quel a été le rôle du héros d'un point de vue énergétique.
3) La force limite que peut appliquer le héros sur le fil correspond environ à son poids. A quelle distance minimale pourra-t-il se retrouver du poteau ? faire une application numérique si $\ell_0 = 10$ m et $v_0 = 20$km/h.

4) On prend en compte un coefficient de frottement solide chaussure-sol égal à 0,005. Est-il judicieux de tenter de s'approcher du poteau ou d'attendre jusqu'à l'arrêt en gardant la distance ℓ_0.

3. Formule de Borda (*)

On considère un pendule simple constitué d'une tige de masse négligeable de longueur l et d'un masse, assimilée à une masse ponctuelle de masse m. On repère la position du pendule par l'angle θ.

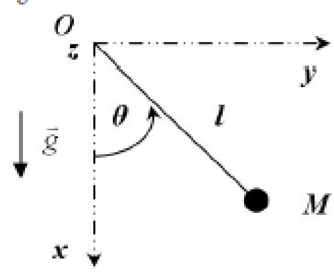


Figure 1

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ. Commenter.
2. On se place dans le cas de petits mouvements
   (a) Définir la pulsation propre de l'oscillateur et l'exprimer.
   (b) Résoudre cette équation différentielle en considérant qu'à $t = 0$, θ est nul et $\dfrac{d\theta}{dt}$ vaut $\dfrac{V_0}{l}$.
   (c) Déterminer la période T_0 des oscillations. Que veut dire isochronisme des oscillations ?
   (d) Exprimer $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ en fonction de θ et des données de l'énoncé. En déduire le portrait de phase de l'oscillateur. Commenter.
3. On ne considère plus que l'angle θ est petit.
   (a) On considère toujours qu'à $t = 0$, θ est nul et $\dfrac{d\theta}{dt}$ est égale à $\dfrac{V_0}{l}$. Exprimer $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ en fonction de θ et des données de l'énoncé. En déduire, en fonction de la valeur de V_0, les différentes trajectoires de phases possibles.
   (b) On considère maintenant $\theta(0) = \theta_0$ nul et $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0$.
   - Exprimer dt en fonction de θ et T_0, θ_0 et $d\theta$.
   - En déduire l'expression intégrale de la période T_1 du mouvement en fonction de T_0 et de θ_0.
   - Écrire cette expression sous forme de série sous le terme intégrale en utilisant le paramètre ϕ défini par :
   $$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2} \times \sin\phi$$
   - Si θ_0 n'est pas trop grand, on peut garder uniquement le premier terme (différent de 1) de ce développement. En déduire la formule de Borda :
   $$T_1 = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$
   - Que vaut le terme suivant dans l'expression de T_1 ?

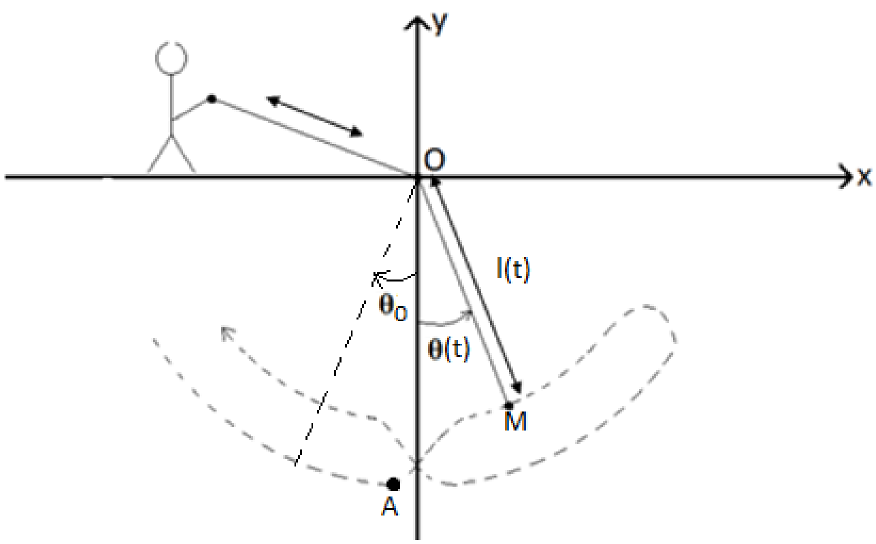
4. Oscillations parametriques(**)

L'oscillateur paramétrique le plus connu est le l'encensoir de la cathédrale de Saint-Jacques de Compostelle en Espagne : son mouvement est entretenu par des « tiraboleiros » dont le rôle est de faire varier périodiquement la longueur du pendule. L'objet de cet exercice est d'en comprendre le mécanisme.

Soit un pendule simple, de longueur notée $l(t)$ à une date t, accroché au plafond d'une salle. La ficelle, de masse négligeable, sur laquelle est fixée la masse ponctuelle m en un point M, est maintenue par un opérateur qui effectue les opérations suivantes :

- Lorsque la ficelle du pendule, de longueur L, passe au voisinage immédiat de la verticale (Oy), l'opérateur tire dessus et raccourcit la longueur du pendule de l_0, longueur très petite devant L.
- Lorsque le pendule est environ au maximum de son amplitude, l'opérateur relâche le fil sans tension.

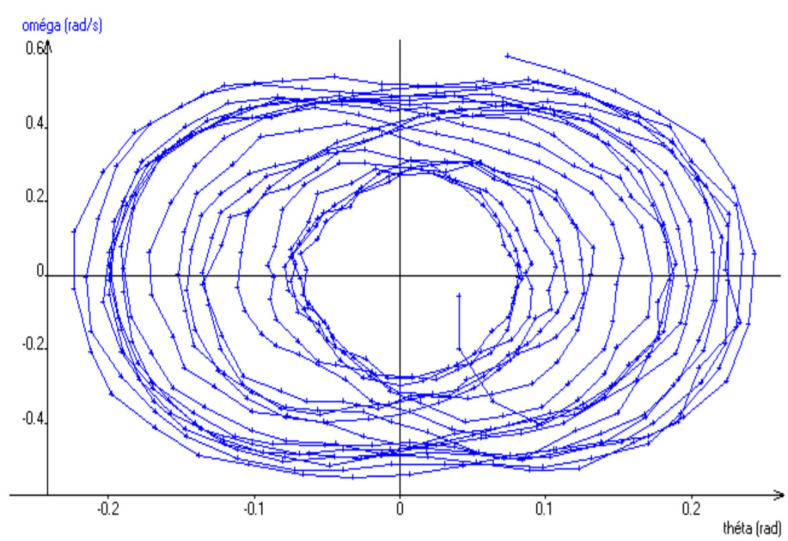
La figure ci-dessous illustre le mouvement du pendule, dont le fil fait l'angle $\theta(t)$ avec la verticale à une date t :



Le pendule, initialement de longueur L, est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale. On note θ_0 son amplitude initiale et $E_{m,0}$ son énergie mécanique initiale. On négligera tout frottement entre le pendule et l'air environnant. Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = -g\vec{e_y}$.

1) Déterminer la variation d'énergie mécanique ΔE_m du pendule au cours d'une opération de raccourcissement supposée très rapide. On exprimera le résultat en fonction de m, g, l_0, L et v_A, v_A étant la vitesse du point M en A ($x_A = 0^-$), point où l'opérateur commence à tirer sur le fil. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_m du pendule lorsque l'opérateur rallonge le fil ?
2) Déterminer $E_{m,1}$, l'énergie mécanique du pendule après avoir raccourci une première fois le fil, en fonction de $E_{m,0}$, m, g, l_0 et θ_0. Déterminer alors $\cos(\theta_1)$, θ_1 étant l'amplitude des oscillations correspondantes, en fonction de L, l_0 et θ_0. Que vaut $E_{m,2}$, l'énergie mécanique du pendule après avoir rallongé une première fois le fil ? Déterminer alors $\cos(\theta_2)$, θ_2 étant l'amplitude des oscillations correspondantes, en fonction de L, l_0 et θ_0.
3) Déterminer $E_{m,3}$, l'énergie mécanique du pendule après avoir raccourci une deuxième fois le fil. Quelle serait alors l'expression de $\cos(\theta_3)$, θ_3 étant l'amplitude des oscillations correspondantes ? Déterminer $E_{m,4}$, l'énergie mécanique du pendule après avoir rallongé une deuxième fois le fil. Déterminer alors $\cos(\theta_4)$, θ_4 étant l'amplitude des oscillations correspondantes, en fonction de L, l_0 et θ_0.
4) On note θ_{2n}, l'amplitude des oscillations après la $n^{\text{ième}}$ opération {raccourcissement + rallongement}. Déterminer $\cos(\theta_{2n})$ en fonction de n, θ_0, l_0 et L. Y a-t-il une limite à l'augmentation de l'amplitude ?

On pourra si besoin effectuer des applications numériques avec les valeurs suivantes : $L = 10$ m, $l_0 = 0{,}25$ m et $\theta_0 = 10°$.

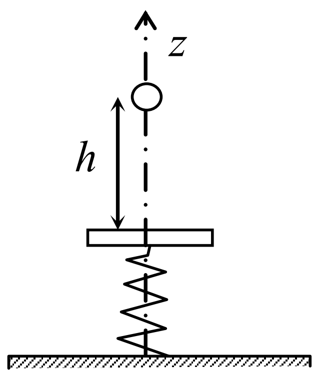


Portrait de phase de l'oscillateur

5. PATE A MODELER (**)

On considère une boule de pâte à modeler de masse m. Quand cette boule est lancée sur une surface lisse, elle s'écrase et s'accroche dans le cas où l'énergie d'écrasement est supérieure à une énergie E_0. Une fois accrochée, la force (orthogonale à la surface) nécessaire pour la décoller est F_0. L'énergie d'écrasement est égale à l'énergie perdue par la boule lors du choc.

1) On lâche la boule sans vitesse initiale à une altitude h au-dessus du sol lisse. La boule s'accroche pour une hauteur supérieure à h_0 = 2 m. Calculer l'énergie E_0. On négligera l'énergie reçue par le sol durant le choc.
2) On lâche la boule sans vitesse initiale à une hauteur h au-dessus d'une plaque à surface lisse horizontale de masse M. La plaque est reliée au sol à l'aide d'un ressort vertical de raideur k. On suppose que la quantité de mouvement de la boule et la plaque se conserve durant le choc. On suppose que la plaque est à l'équilibre avant le choc.



a. Déterminer la condition sur h pour que la boule s'accroche après le choc.
b. Préciser si la boule décolle de la plaque durant le mouvement dans les cas suivants

i) h = 3 m

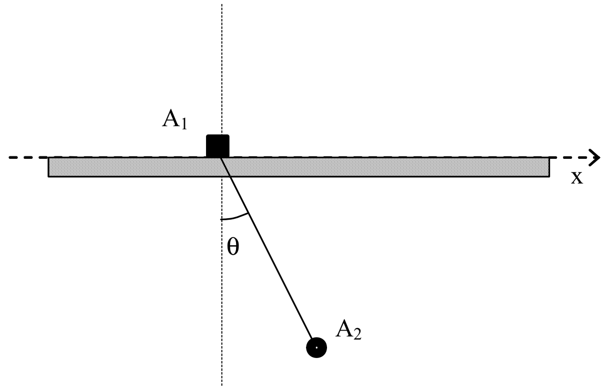
ii) h = 1 m

Données : g = 9,8 m s^{-2} ; m = 50 g ; M = 100 g ; k = 10 N m^{-1} ; F_0 = 1 N

II. SYSTEMES A DEUX CORPS – FORCES CENTRALES

6. SYSTEME A DEUX CORPS (**)

On considère l'ensemble de deux corps A_1 et A_2, assimilés à deux points matériels respectivement de masses m_1 et m_2, liés par une tige rigide de masse négligeable et de longueur ℓ. Le point A_1 se déplace sur un plan horizontal immobile, parfaitement glissant.



On s'intéresse au mouvement de l'ensemble dans le plan vertical ; initialement on écarte la tige par rapport à la verticale et on abandonne l'ensemble sans vitesse initiale.

1) Quelle est la nature de la trajectoire du centre d'inertie G de l'ensemble.
2) Déterminer la période d'oscillations de faible amplitude. Discuter le résultat.

7. MOLECULE DIATOMIQUE (*)

On considère une molécule diatomique A-B de longueur de liaison au repos x_0. L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes s'exprime dans le cadre du modèle de Morse par la relation suivante :

$$V(x) = D\left[1 - \mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}\right]^2$$

où D représente l'énergie de dissociation de la molécule, x la longueur de liaison et β une constante positive. On note m_1 et m_2 les masses des deux atomes A et B.

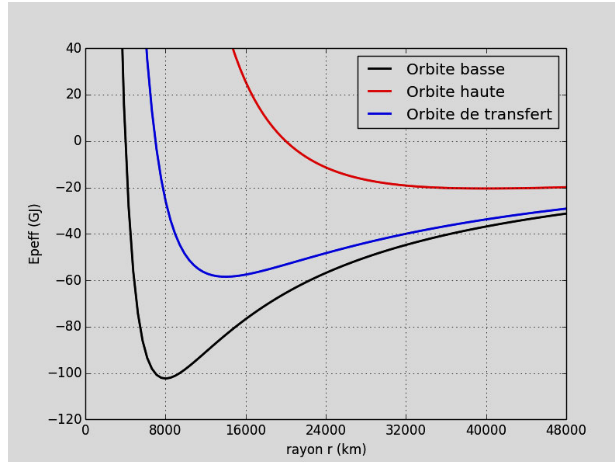
On souhaite mettre en évidence la dilatation thermique de la molécule, c'est-à-dire une augmentation de la valeur moyenne de la longueur de liaison quand la température augmente.

1) On se place dans le cas où la molécule vibre avec une faible amplitude de vibration, c'est-à-dire, $\beta\,|x - x_0| \ll 1$. Calculer la pulsation d'oscillation, ω_0, de la molécule.
2) On admet qu'à une température T, l'énergie totale de vibration de la molécule est égale à $k_B\,T$ où k_B est la constante de Boltzmann.
   a. Déterminer l'intervalle dans lequel varie la longueur de la liaison x.
   b. En déduire la longueur de liaison moyenne en fonction de la température et le coefficient de dilatation linéaire.
   c. Calculer la longueur de liaison à 1000 K.

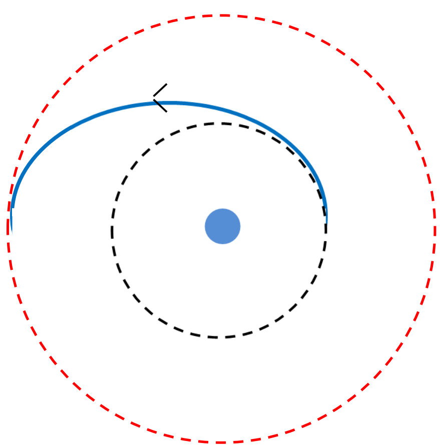
Données (Molécule H-Cl) : Masses molaires des deux atomes : 1 et 35 g/mol ; Energie de dissociation de la molécule égale à 445 kJ/mol ; $x_0 = 0{,}128$ nm ; $\beta = 1{,}81\times10^{10}$ m^{-1} ; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K

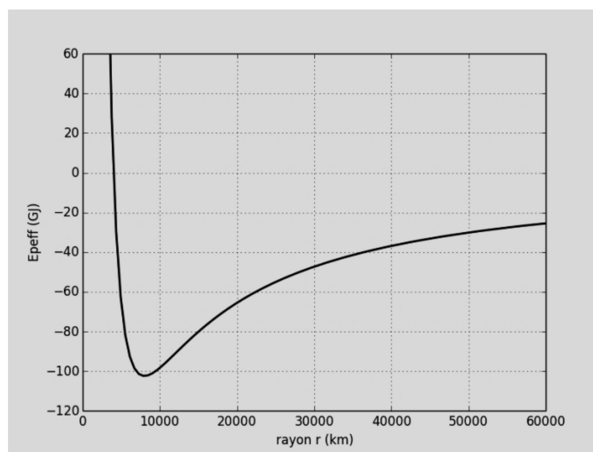
8. Satellite terrestre (*)

Un satellite de masse m a une trajectoire circulaire de rayon R autour de la Terre.



1) Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite. Que devient cette expression dans le cas d'une trajectoire elliptique de demi-grand axe a ?
2) Dans le cas général, montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire en fonction de la coordonnée polaire radiale r sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$. Exprimer et dénommer la fonction $E_{peff}(r)$.
3) $E_{peff}(r)$ a l'allure ci-dessus. Que peut-on prévoir sur la nature de la trajectoire du satellite en fonction de la valeur de son énergie mécanique ?
4) Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est d'abord placé sur une trajectoire circulaire basse de rayon 8000 km, puis ensuite sur une trajectoire circulaire haute de rayon 42000 km. Le passage se fait grâce à une trajectoire de transfert elliptique dont le périgée est sur l'orbite basse et l'apogée sur l'orbite haute.





Quelle est la variation d'énergie mécanique que les moteurs doivent communiquer au satellite pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert ? Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est de 50 $MJ.kg^{-1}$, calculer la masse de carburant nécessaire.

5) Justifier le choix du rayon de l'orbite haute.

9. Satellite SPOT (**)

Le but de cet exercice est d'étudier le mouvement du satellite SPOT autour de la Terre.

1) Dans le cas d'une trajectoire circulaire, exprimer la vitesse du satellite SPOT en fonction du rayon de sa trajectoire. En déduire la troisième loi de Kepler.

2) Etablir une relation simple entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire l'énergie mécanique du satellite.
3) Le satellite SPOT a une trajectoire circulaire à l'altitude 800 km. Calculer la vitesse et la période de révolution du satellite.
4) La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. On suppose que la force de frottement est proportionnelle à la masse du satellite et au carré de sa vitesse. On note α la constante de proportionnalité.
    a. Le satellite va-t-il s'éloigner ou se rapprocher de la Terre ? Sa vitesse va-t-elle augmenter ou diminuer ?
    b. Quelle est la dimension de α ?
5) Le satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une variation d'altitude d'environ 1 m par révolution.
    a. En déduire un ordre de grandeur de α
    b. Calculer la variation d'altitude du satellite au bout de 10 ans de fonctionnement.
6) Le rôle du satellite SPOT est d'acquérir plusieurs images d'une même zone à des instants différents. D'après les résultats précédents, discuter du choix de l'altitude de l'orbite.

10. ORBITOGRAMME (**)

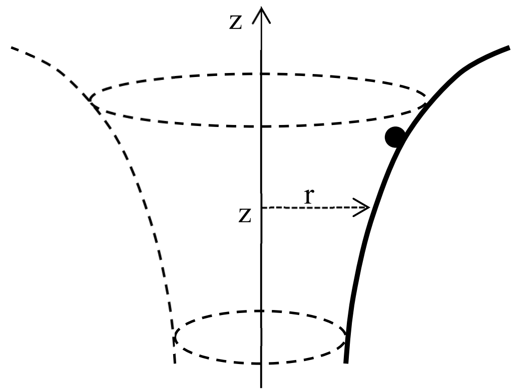
1) Exprimer la force gravitationnelle entre deux masses. En déduire l'énergie potentielle gravitationnelle.
2) Enoncer les lois gouvernant les trajectoires des planètes du système solaire.

La distance entre la Terre et le Soleil est de 150 millions de kilomètres. Sachant que la période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 an, calculer sa distance au Soleil.

3) On dit que la Terre et Mars sont en opposition lorsque le Soleil, la Terre et Mars sont approximativement alignés dans cet ordre. Quelle est la période de ce phénomène ? Quelle est alors la distance entre les deux planètes ?

4) En réalité cette distance varie, que peut-on en déduire ?

L'orbitogramme est un dispositif permettant de simuler l'attraction gravitationnelle. Il s'agit d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe z = f(r) autour de l'axe Oz.



Orbitogramme de la Cité des Sciences

Une bille de masse m, assimilée à un point matériel, se déplace sans frottement sur cette surface.

5) Comment choisir la courbe z = f(r) pour simuler la gravitation ? Déterminer deux constantes du mouvement de la bille.

6) Montrer que l'énergie mécanique de la bille se met sous la forme $\frac{1}{2}m\alpha(r)\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$.

   a. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de cette énergie
   b. Comment faut-il lancer la bille pour qu'elle ait une trajectoire circulaire ?
   c. Comment faut-il lancer la bille pour qu'elle échappe à l'attraction ?

11. Comete (**)

1) On suppose que la Terre décrit autour du Soleil une trajectoire circulaire de rayon R_T, à la vitesse V_T. Déterminer R_T et V_T.

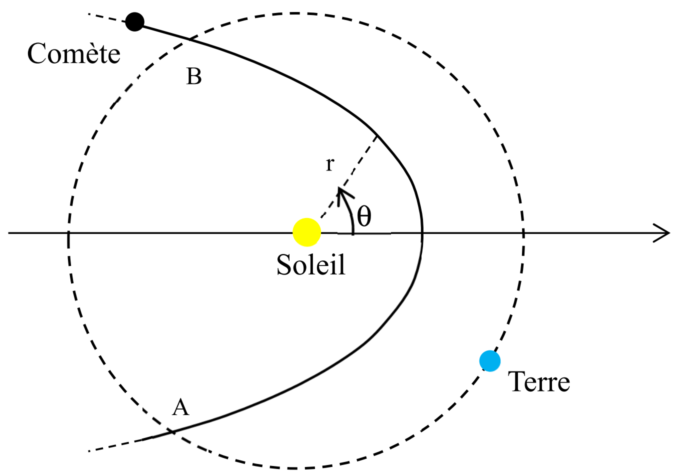
2) Une comète (imaginaire !) a une trajectoire coplanaire à celle de la Terre. Son périhélie vaut $R_T/2$ et sa vitesse au périhélie vaut $2V_T$. On néglige l'attraction gravitationnelle de la Terre sur la comète. Quelles est la nature de la trajectoire de la comète ?

3) En coordonnées polaires, la trajectoire de la comète a pour équation : $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$

   Déterminer les constantes e et p et déterminer la position des points d'intersection A et B avec la trajectoire de la Terre.

4) On considère que la portion de trajectoire entre A et B correspond au temps de visibilité de la comète à l'œil nu depuis la Terre. Déterminer ce temps.

On donne : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4}{3}$



12. Mise en orbite d'une fusee (***)

On considère une fusée dont les moteurs se sont arrêtés normalement après la phase d'accélération. L'arrêt s'est produit après la sortie de l'atmosphère à l'altitude $h_a = 100\ km$ ($point\ A$). On note le rayon terrestre $R_T = 6400\ km$ et O le centre de la terre. On pose $r_o = R_T + h_a$. A la sortie de l'atmosphère, l'angle que fait le vecteur vitesse par rapport à l'horizontale du lieu est ϕ_o. La fusée est ensuite soumise uniquement à l'attraction gravitationnelle de la terre. Après son mouvement dans l'espace, la fusée revient au contact de l'atmosphère au point noté B, l'angle entre mes deux demi-droites (OA) et (OB) étant noté α. On note g l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre. Pour les applications numériques, on prendra $\phi_o = 45°$ et $\alpha = 90°$.

1) Faire un schéma de la situation et montrer sans calculs que l'angle d'entrée dans l'atmosphère est également ϕ_o. Ecrire simplement à priori l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires en mettant en évidence le paramètre de l'ellipse p, et son excentricité e. En déduire une inégalité faisant intervenir p, e et r_o.
2) Déterminer l'excentricité en fonction de $\sin(\phi_o)$ et $\sin\left(\phi_o + \frac{\alpha}{2}\right)$. Application numérique.
3) Calculer a, le demi grand axe de l'ellipse en fonction de e, α et r_o.
4) Calculer v_o, la vitesse au moment de la sortie de l'atmosphère en fonction de g, r_o, R_T et a. Calculer également l'altitude maximale h_M par rapport à l'atmosphère.

Données : Equation de la trajectoire en coordonnées polaires, l'angle θ étant compté à partir du périgée de la trajectoire : $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$

13. Etoiles doubles (HP)

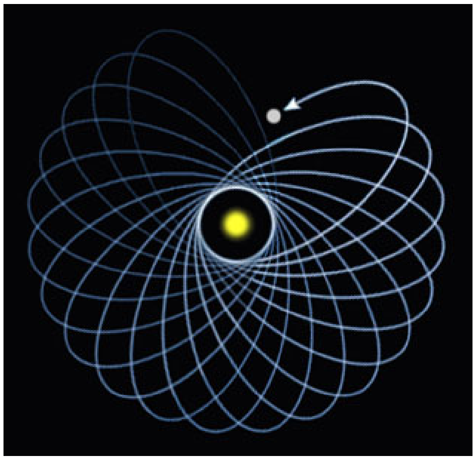
On considère une étoile double constituant un système isolé. Chaque étoile suit une trajectoire circulaire dans le référentiel du centre de masse avec des rayons dont le rapport est α. Leur distance est D et la période du mouvement T. Exprimer la masse de chaque étoile en fonction des grandeurs α, D et T.

III. Planche oral X – ESPCI (***)

1) On considère un système constitué de deux étoiles de masses m_1 et m_2. Ce système perd de l'énergie de façon à de que $\frac{d\,E_m}{dt} = -\alpha < 0$. Les étoiles sont initialement à une distance r_0 l'une de l'autre. A quelle condition sur α la variation d'énergie mécanique est-elle « petite » ? Calculer le temps et le nombre de période au bout duquel les étoiles rentrent en collision.
2) Deux particules de masse m, portant une charge positive q sont reliées par un ressort de raideur K et de longueur à vide nulle. On impose un champ électrique $\vec{E}$ constant orienté selon $\vec{e}_x$. On suppose que les particules sont astreintes à se déplacer selon l'axe (Ox). Déterminer la distance $d(t)$ entre les deux particules pour des petits déplacement autour de la « position d'équilibre ».
3) Précession de Mercure : en plus de la force de gravitation exercée par le soleil su la planète Mercure, il s'exerce sur cette planète une force :

$$\vec{\Delta}\vec{F} = \frac{\gamma G M_s M_m}{r^4}\vec{r}$$

Où :M_s est la masse du soleil, M_m est la masse de Mercure, $\vec{r}$ est le vecteur position de mercure par rapport au soleil et où γ est un paramètre. Etudier les différentes trajectoires possibles en fonction de γ .



IV. EXERCICES MINES

Une particule de masse m est soumise à un champ de force centrale de centre O associé à l'énergie potentielle :

$$U = m\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}\right) \text{ ; } (a \text{ et } b \text{ non nuls})$$

Les conditions initiales sont :

$$r = r_0$$
$$\vec{V} = \vec{V}_0$$

A quelles conditions portant sur r_0 ; $\vec{V}_0$; a ; b la trajectoire de la particule reste-t-elle bornée ?

Un vaisseau est à une très grande distance d'un astre, sa vitesse est $\vec{V}_B$ et son paramètre d'impact est b.

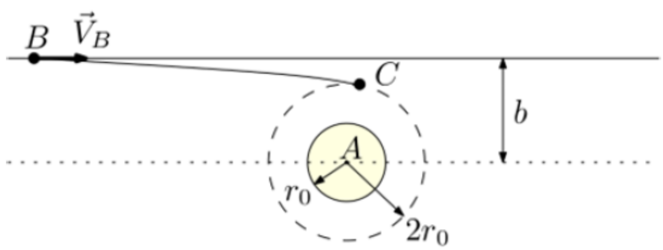


Figure 13

1. Quelle est la nature de sa trajectoire ?
2. Quelle est la condition sur b pour que le vaisseau arrive en C avec une vitesse orthoradiale ?
3. On veut que le vaisseau adopte une trajectoire circulaire en C. Que faut-il faire ? Comment réduire la vitesse du vaisseau ?

---

1. On considère le dispositif suivant :

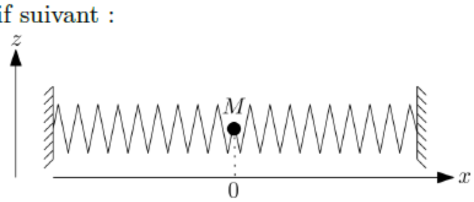


Figure 9

On déplace la masse de sa position d'équilibre d'une distance a selon l'axe (Ox). Que vaut la période T des oscillations ? Comment est modifiée T si on déplace initialement la masse M de $2a$?

2. On déplace désormais la masse selon l'axe (Oz). Déterminer la période des oscillations en fonction de l'élongation initiale.

On considère un point M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F}$. Comment doit être $\vec{F}$ pour que la trajectoire de M soit circulaire et passe par le centre de force ?

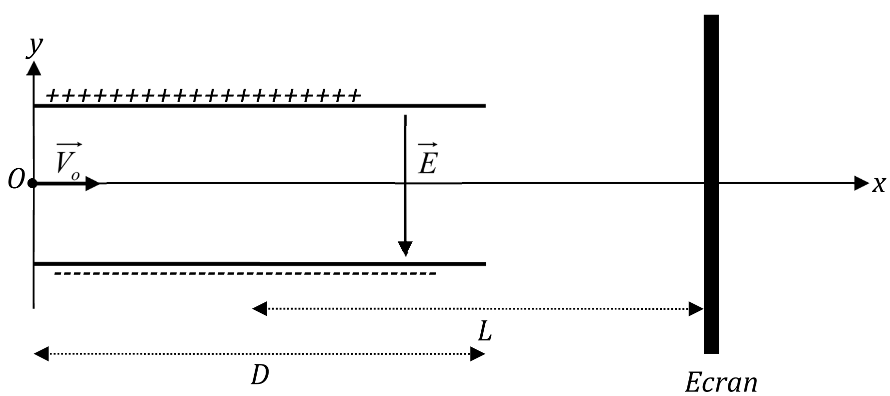
1. On considère une sonde orbitant autour d'une planète de masse M en suivant une trajectoire elliptique dont la trajectoire en coordonnées polaire, dont l'un des foyers est le centre de la planète et est de la forme :
$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$
A quelle condition la trajectoire de la sonde est-elle circulaire ? que vaut alors la vitesse de la sonde ?
En réalité la planète est gazeuse. On introduit alors sa masse volumique $\mu(r)$ uniquement fonction de r ainsi que le champ de gravitation à une distance r du centre de la planète : $\vec{g}(r) = g(r)\vec{e}_r$.
On cherche l'expression de $\mu(r)$ correspondant à une trajectoire de la sonde de la forme :
$$r = \frac{r_0}{1 + a\cos(k\theta)}$$
où a, $k > 1$, r_0 sont des paramètres de la trajectoire.
2. Exprimer le champ de gravitation $g(r)$ en fonction de r_0, a, k, r et C la constante des aires.
3. En appliquant l'équation de Maxwell-Gauss pour la gravitation, établir une relation entre le champ de gravitation, $g(r)$ au niveau de la sonde et $\mu(r)$.
4. En déduire l'expression de $\mu(r)$. Peut-on en déduire les champs de pression et de température dans la planète ?

$$\mathrm{div}\vec{X} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 X_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta X_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial X_\phi}{\partial\phi}$$

V. MOUVEMENTS D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS DIFFERENTS CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES CONSTANTS ET UNIFORMES.

1. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE UNIFORME (*)

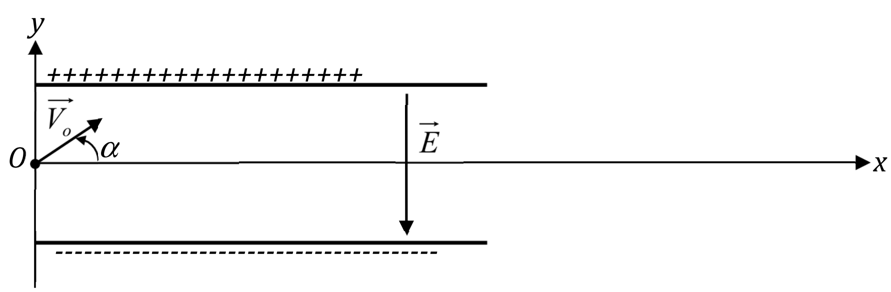
Une particule (proton ou électron) de masse m et de charge q pénètre entre les plaques d'un condensateur plan où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$. La particule pénètre perpendiculairement au champ avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$.



On introduit le repère (O,x,y,z) ,fixe dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen, tel que O coïncide avec la position initiale de la particule chargée, et tel que : $\vec{E} = -E\vec{u_y}$ *et* $\vec{V_0} = V_0\vec{u_x}$ *.*

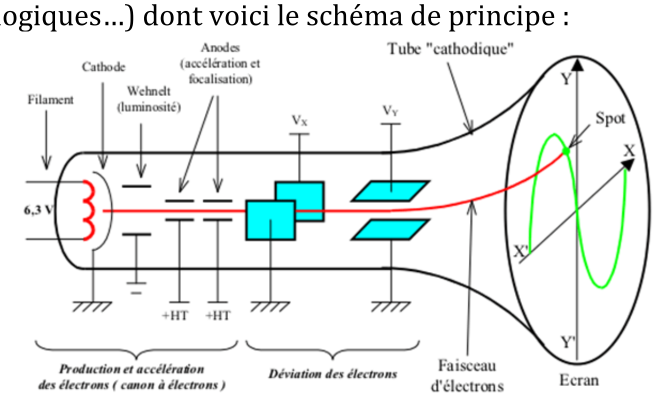
1. Montrer que, pour un champ usuel de 10^4 V /m, le poids peut être négligé devant la force électrique agissant sur la particule.
2. Etablir l'équation de la trajectoire de la particule à l'intérieur des armatures et notamment montrer que son mouvement est plan.
3. Montrer qu'à l'extérieur des armatures, le mouvement de la particule est, dans une première approximation, rectiligne uniforme.
4. Déterminer la position du point d'impact de la particule sur un écran situé à la distance L du centre du système déflecteur, la longueur des plaques étant égale à D. Donner notamment la valeur de la déflection électrique δ_E, correspondant à la coordonnée y du point d'impact.
5. Représenter l'allure de la trajectoire d'une particule chargée négativement puis d'une particule chargée positivement sur le schéma de la question a.
6. AN : D = 5 cm ; L = 17,5 cm ; E = 10^4 V/m ; $V_0 = 10^5 m.s^{-1}$. Dans le cas d'un électron puis d'un proton, déterminer la valeur de δ_E.

La particule étudiée précédemment pénètre maintenant entre les deux plaques du condensateur avec une vitesse V_0 faisant un angle α avec l'axe (Ox).



7. Montrer que le mouvement de la particule entre les deux plaques est parabolique et notamment établir l'équation de la trajectoire.
8. Mettre en évidence l'analogie du mouvement de la charge avec celui d'une masse m dans le champ de pesanteur.
9. Etudier le cas particulier où α = 90°.

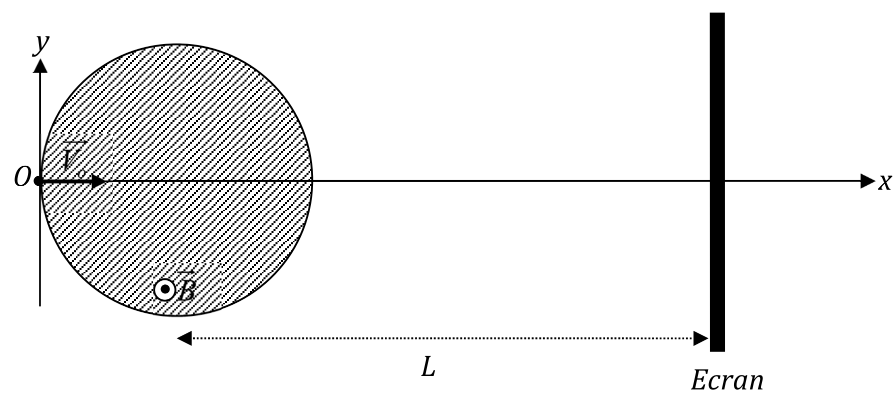
Le cas où $\alpha = 0$ correspond au tube cathodique classique (utilisé dans les anciens téléviseurs, les oscilloscopes analogiques…) dont voici le schéma de principe :



2. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE UNIFORME (*)

Cette même particule pénètre dans une région cylindrique de rayon R = D/2 où règne un champ magnétique, $\vec{B}$, uniforme parallèle aux génératrices du cylindre. Sa vitesse initiale, $\vec{V_0}$, orthogonale à $\vec{B}$, est dirigée vers l'axe de symétrie de révolution du cylindre. La particule est repérée par son impact sur un écran situé à la distance L (L > R) de l'axe de révolution du cylindre.

On introduit le repère (O,x,y,z),fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, tel que :O coïncide avec la position initiale de la particule ; $\vec{B}=B\vec{u_z}$ et $\vec{V_0}=V_0\vec{u_x}$;le plan de l'écran est parallèle au plan(Oyz).



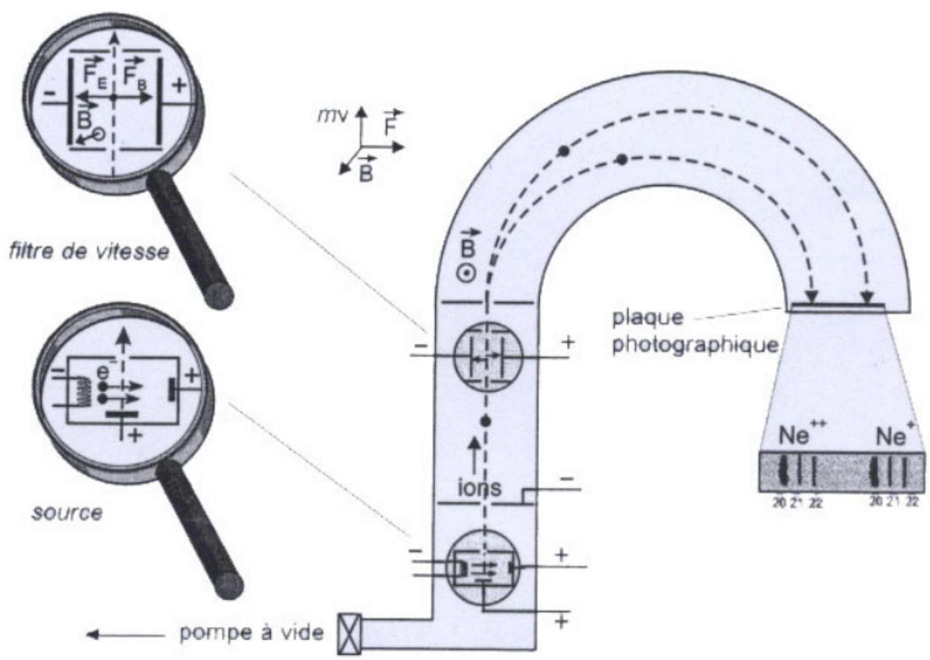
1. Montrer que, dans l'approximation non relativiste, le poids peut être négligé devant la force magnétique agissant sur la particule (les vitesses restant supérieures à 10^5m/s).
2. Montrer que le mouvement de la particule dans le champ $\vec{B}$ est circulaire uniforme. Donner l'expression du rayon du cercle ρ et montrer que la position du centre du cercle dépend du signe de la charge de la particule (On notera respectivement C_+ et C_- les centres des cercles correspondant à une particule de charge positive et négative).
3. A quelle vitesse angulaire le cercle est-il parcouru par la particule ? Comment nomme-t-on cette pulsation ?
4. Donner l'expression de la déviation magnétique δ_M de la particule correspondant à la coordonnée y du point d'impact. Dans le cas d'une déviation faible, la comparer à la déflection électrique δ_E obtenue à la question I-
5. Tracer l'allure de la trajectoire d'une particule de charge négative, puis d'une particule de charge positive. Placer les points C_+ et C_- correspondants.

Application :

SPECTROGRAPHE DE MASSE (*)

On veut séparer les deux isotopes du brome $_{79}$ Br et $_{81}$Br dont les masses m_1 et m_2 sont proportionnelles aux nombres de masse A_1= 79 et A_2= 81. Les atomes de brome sont d'abord ionisés dans une chambre d'ionisation en ions Br^- d'où ils sortent par la fente F avec une vitesse *sensiblement nulle . Puis ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme entre les plaques P_1 et P_2; la tension entre ces plaques vaut : $U_{P2P1} = V_{P2}- V_{P1}= Uo=4.\ 10^3$ V. Enfin, les ions pénètrent, à travers la fente F' et avec un vecteur vitesse vo, perpendiculaire aux plaques, dans une région (chambre de déviation) où règne un champ magnétique uniforme à perpendiculaire au plan de la figure (B = 0,1T). Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.*

1. Montrer que, quel que soit l'isotope, les ions pénètrent en F' dans la chambre de déviation avec la même énergie cinétique Ec. Calculer la valeur de Ec en joules puis en keV. Les ions ont-ils la même vitesse en F'?
2. Donner le sens du vecteur B qui permet aux ions d'être déviés vers le bas
3. Rappeler, sans démonstration, l'expression littérale du rayon R du cercle en fonction de la masse de l'ion, de sa charge, de la tension accélératrice Uo et du champ magnétique B. Conclure.
4. Calculer R_1 et R_2.



Le spectrographe décrit ici est le spectrographe de masse de Brainbrige,
il existe de nombreux autres spectrographes de masse, plus récents.

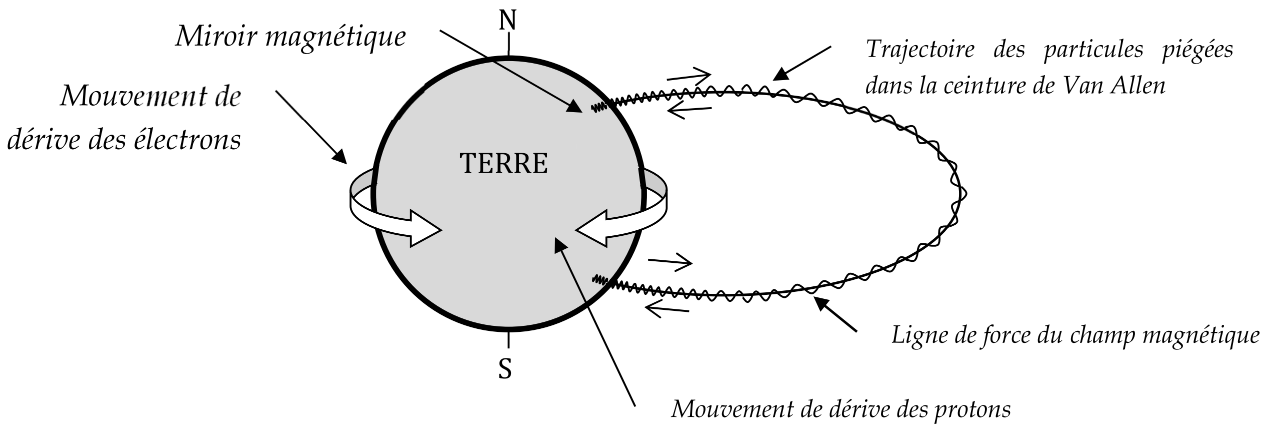
La particule pénètre maintenant dans une région où règne un champ $\vec{B}$ uniforme mais avec une vitesse initiale, $\vec{V_0}$, quelconque. On introduit le repère cartésien (O,x,y,z) tel que O coïncide avec la position initiale de la particule et l'axe (Oz) est porté par le champ $\vec{B}$.

5. Etablir les équations horaires en coordonnées cartésiennes de la trajectoire. On introduira la pulsation cyclotron : $\omega_c=\frac{qB}{m}$. Tracer l'allure de la trajectoire.

6. Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération de la particule en coordonnées cylindriques.
7. Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération de la particule dans la base locale de Frenet. Quelle distance a parcourue la particule au bout d'un temps t quelconque ?

Application :

MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGEES DANS LA MAGNETOPHERE TERRESTRE – MIROIRS MAGNETIQUES (**)



Dans une première approximation, le champ magnétique terrestre correspond au champ crée par un dipôle magnétique qui serait placé au centre de la terre. Ce champ retient dans l'espace un grand nombre de particules chargées provenant du soleil (essentiellement des protons et des électrons). Ces particules piégées forment deux anneaux appelés ceintures de Van Allen l'une interne, à une altitude d'environ 10000 km, l'autre externe, à une altitude d'environ 60000 km.

Ces particules ont un mouvement périodique complexe, pouvant se décomposer en trois mouvements. Le premier est un mouvement de rotation autour du champ magnétique local. Le second est un mouvement de va-et-vient entre les deux hémisphères. A ces deux mouvements se superpose une dérive longitudinale qui amène les particules à tourner autour de la terre sur une coquille magnétique.

L'objectif de ce problème est l'étude des deux premiers mouvements des particules chargés.

1. Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme.

Dans un premier temps on étudie le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_0}$. On introduit le repère (O,x,y,z) fixe dans le référentiel terrestre supposé ici galiléen Le champ magnétique peut alors s'écrire : $\overrightarrow{B_0}=B_0\overrightarrow{e_z}$.

1.1. Etude du mouvement de la particule chargée.

1.1.1. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la particule dans le référentiel terrestre et établir le système d'équations différentielles vérifié par les coordonnées (x(t),y(t),z(t)) de la particule. On introduira la pulsation cyclotron : $\omega_C=\dfrac{qB_0}{m}$ et on négligera le poids devant la force magnétique agissant sur la particule.

1.1.2. Intégrer ces équations différentielles et donner les expressions de x(t), y(t) et z(t) en sachant qu'à t = 0, la particule a une vitesse $\overrightarrow{V_0}=\dot{y}_0\overrightarrow{e_y}+\dot{z}_0\overrightarrow{e_z}$ (on prendra $\dot{y}_0>0$)et quelle se trouve au point $A\left(-\frac{\dot{y}_0}{\omega_c},0\right)$. Montrer que la trajectoire de la particule est une hélice dont on donnera le rayon R et le pas h. Quelle est la signification physique de ω_C ?

1.1.3. Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération de la particule en coordonnées cylindriques.

On décompose la vitesse de la particule de la manière suivante : $\vec{V}=\overrightarrow{V_z}+\overrightarrow{V_\perp}$ où $\overrightarrow{V_z}$ est la composante de la vitesse colinéaire au champ et $\overrightarrow{V_\perp}$ est la composante de la vitesse perpendiculaire au champ.

1.1.4. Montrer qu'au cours du mouvement, les normes de ces trois vecteurs restent constantes et donner leurs expressions en fonction de $\dot{y}_0$ et $\dot{z}_0$.

1.2. Application à l'étude du mouvement des particules chargées dans la ceinture de Van Allen.

Dans une première approximation, on peut considérer que, localement et loin des pôles, le champ magnétique terrestre est uniforme et qu'ainsi la particule a un mouvement hélicoïdal autour des lignes de force du champ. Dans le plan de l'équateur, on relève la période de rotation des électrons autour des lignes de force du champ : $T_{c,e}=100\mu s$

1.2.1. Donner la pulsation cyclotron correspondante et en déduire la valeur du champ magnétique local.

1.2.2. Quelle serait la période de rotation $T_{c,p}$ d'un proton dans ce même champ magnétique local ?

2. Mouvement de particule dans un champ faiblement non uniforme.

Dans un deuxième temps on tient compte de la non uniformité du champ magnétique terrestre, que l'on notera ici $\vec{B}$, afin d'expliquer le mouvement de va et vient des particules entre les deux pôles.

On modélise le champ de la manière suivante : En un point M de l'espace, repéré par ses cordonnées cylindriques, le champ peut s'écrire : $\vec{B}(M) = B_\rho\vec{e}_\rho + B_z\vec{e}_z$ où $B_z(\rho,z)=B_z(z)$ et $B_\rho(\rho,z) = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$.

2.1. Approche théorique.

2.1.1. Montrer que en tout point M de l'espace, on a : $\dot{z}B_\rho=-\frac{\rho}{2}\dot{B}_z$

2.1.2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la particule chargée et en utilisant le résultat précédent, montrer que la trajectoire d'une charge vérifie :
$$m\rho^2\dot{\theta}+\frac{qB_z\rho^2}{2}=cste$$

2.1.3. Sachant que le champ magnétique est faiblement non uniforme, démontrer, en utilisant judicieusement les résultats de la première partie, que l'équation de la question précédente devient : $\frac{V_\perp^2}{B_z}=cste$.

2.2. Miroirs magnétiques dans les ceintures de Van Allen.

On considère que la modélisation précédente est applicable au champ magnétique terrestre .Dans ce paragraphe, seules des réponses qualitatives sont demandées.

2.2.1. Lorsque la particule se dirige vers les zones de champ fort (pôles), montrer que sa vitesse $\overrightarrow{V_z}$ diminue ainsi que le pas de l'hélice.

2.2.2. En déduire que la vitesse $\overrightarrow{V_z}$ peut s'annuler. Quel est alors le mouvement de la particule ? En réalité cette situation est instable et la particule repart en sens inverse : on parle de miroir magnétique.

2.2.3. Montrer que l'altitude des miroirs magnétiques diminue lorsque la vitesse initiale $\overrightarrow{V_z}$ augmente. Quel phénomène peut-on observer si cette vitesse est suffisamment grande ?

---

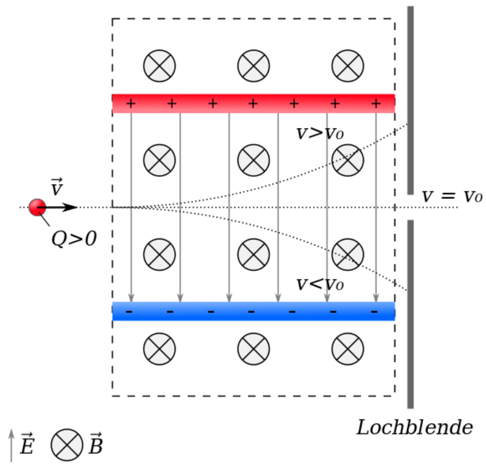
8. Reprendre les questions précédentes en tenant compte des frottements fluides (modélisant les collisions) de la forme :

$$\vec{F}_f = -\alpha\,\vec{V}$$

3. Mouvement d'une particule chargee dans des champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ uniformes (**)

1. De manière générale donner l'expression de la force qui agit sur la particule.
2. Montrer qu'en orientant convenablement les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$, une particule chargée ayant une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ convenablement choisie, que l'on précisera, passera sans que sa vitesse soit modifiée (on notera pour la suite cette vitesse $\vec{V}_d$).

Ce système est un filtre de vitesse très précis, appelé filtre de Wien, que l'on peut utiliser avant un spectrographe de masse qui sépare alors les particules ayant des rapports q/m différents.



3. *La particule pénètre dans un espace où règnent des champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ orthogonaux entre eux avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ orthogonale à $\vec{B}$.*
   On introduit le repère (O,x,y,z),fixe dans la référentiel du laboratoire supposé galiléen, tel que : O coïncide avec la position initiale de la particule.

   On pose : $\vec{B}=B\vec{u_x}$, $\vec{E}=E\vec{u_z}$ et $\vec{V_0}=\dot{y}_0\vec{u_y}+\dot{z}_0\vec{u_z}$

3.1. Montrer que de manière générale le mouvement peut se décomposer en un mouvement de translation à la vitesse $\vec{V}_d$ et d'un mouvement de rotation de rayon $\rho=\frac{mV_0}{|q|B}$.

3.2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer les expressions de x(t), y(t) et z(t) en tenant compte des conditions initiales.

3.3. Montrer que dans le cas particulier où $\vec{V_0}=\vec{O}$ la trajectoire de la particule est une cycloïde. Tracer l'allure de la trajectoire.

3.4. Montrer que dans le cas particulier où $\dot{z}_0=0$ et $\dot{y}_0=\frac{2E}{B}$ la trajectoire est une autre cycloïde que l'on représentera.

3.5. Montrer que dans le cas où $\dot{z}_0=0$ et $\dot{y}_0$ est quelconque, on observe différents types de trajectoire pour la particule suivant la valeur de $\dot{y}_0$: distinguer les cas où $0<\dot{y}_0<E/B$; $E/B<\dot{y}_0<2E/B$ et $2E/B<\dot{y}_0$.
   Analyser qualitativement la trajectoire dans chaque cas et à l'aide d'un outil informatique tracer l'allure des trajectoires.
   A quoi correspond le cas où $\dot{z}_0=0$ et $\dot{y}_0=E/B$?

4. COMMENT PIEGER UNE PARTICULE CHARGEE ?

a. LE PIEGE DE PAUL (**)

I. Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss. Justifier qu'il est impossible de piéger une particule chargée dans une zone vide de charge à l'aide uniquement d'un potentiel électrostatique.

II. On considère un champ électrostatique quadripolaire dérivant du potentiel électrostatique suivant :

$$V = \frac{V_0}{4a^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

a étant la distance caractéristique du piège.

Montrer que, quelque soit le signe de V_0, il est en effet impossible de piéger une particule chargée dans ce champ.

III. Le piège de Paul est un dispositif à champ quadripolaire variable dans lequel existe le potentiel variable suivant :

$$U(t) = \frac{V(t)}{4a^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) \text{ avec } V(t) = V_0 \cos \omega_p t$$

1. Justifier qualitativement qu'il est en effet possible de piéger une particule chargée dans un piège de Paul

2. Les équations du mouvement d'une particule, de charge q et de masse m, placée dans le piège de Paul, appelées équations de Mathieu, sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} = 2q_x \cos(2\tau)\, x \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = 2q_y \cos(2\tau)\, y \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = 2q_z \cos(2\tau)\, z \end{cases}$$

τ, q_x, q_y et q_z étant des constantes adimensionnées.

Déterminer τ, q_x, q_y et q_z.

3. A l'aide d'un raisonnement physique simple, proposer une condition sur ω_p pour que le piège fonctionne.

4. Une étude plus approfondie des équations de Mathieu, montre que les solutions sont stables si :

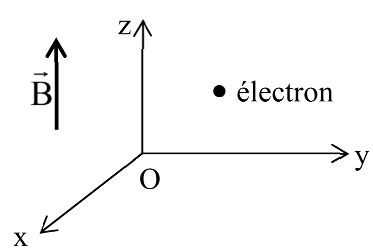
$$0 \leq |q_x|\,,\ |q_y|\,,\ |q_z| \leq 0.908$$

Déterminer une condition sur ω_p pour que le piège fonctionne.

b. PIEGE DE PENNING (**)

On étudie un piège de Penning permettant de confiner un électron au voisinage de l'origine O du repère associé au référentiel galiléen de l'étude.

Dans cette région règnent :



- ✓ Un potentiel électrostatique $V = \frac{U}{a^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$
- ✓ Un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}$ selon Oz.

I- Ecrire les équations cartésiennes du mouvement de l'électron.

II- a) On suppose que le champ magnétique est nul.

- ✓ Décrire qualitativement le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une première pulsation caractéristique notée ω_z.
- ✓ En prenant U = 10 V et a = 1 cm, donner un ordre de grandeur de ω_z.
- ✓ L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?

b) On suppose que le potentiel électrostatique est nul.

- ✓ Décrire qualitativement le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une deuxième pulsation caractéristique notée ω_c.
- ✓ Donner un ordre de grandeur de ω_c.
- ✓ L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?

III- a) Réécrire les équations du mouvement en fonction des deux pulsations ω_z et ω_c .

b) Montrer que l'électron peut avoir un mouvement horizontal circulaire d'équations :

$$x(t) = A cos\omega t$$

$$y(t) = A sin\omega t$$

, à condition de choisir un champ magnétique suffisamment intense. Quelles sont alors les valeurs possibles pour la pulsation ω ?

IV- La trajectoire de l'électron a l'allure suivante. Commenter compte tenu des résultats précédents.