**I.** ARQS : on néglige le temps de propagation des signaux électriques devant leur période ou une durée caractéristique comme une constante de temps.

En pratique, cela revient à négliger la densité de courant de déplacement devant la densité de courant de conduction.

Les équations de Maxwell deviennent alors

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad & \mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Deux conséquences (on peut en parler à tout moment au cours de la planche pour dialoguer avec le candidat) :

- on a les mêmes équations gouvernant $\vec{B}$ qu'en magnétostatique, donc les méthodes et résultats de magnétostatique sont utilisables ici dans le cadre de l'ARQS
- l'équation locale de conservation de la charge s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0 \\ \mathrm{div}\vec{j} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

  Donc on raisonne comme si la densité volumique de charge était stationnaire et le vecteur densité de courant est à flux conservatif (loi des nœuds, électrocinétique, ...)

**II.** Négliger les effets de bord : la structure du champ magnétique est la même que si le solénoïde avait été infini. Cela pose évidemment problème dès qu'on sort du solénoïde.

En pratique, on suppose que l'on a $N$ spires indépendantes, parcourues par la même intensité. En réalité, l'enroulement est en hélice. Il faut donc que le pas de l'hélice soit petit devant $H$, sans oublier la condition $a \ll H$.

Donc on «triche» et on calcule le champ qui serait créé par un solénoïde infini parce que c'est plus simple.

- Symétries : le plan $(M, Oz)$ est plan de symétrie de la distribution des courants donc $\vec{B}(M,t) = B(r,\theta,z,t)\vec{e_z}$.
- Invariances : la distribution des courants est invariante par rotation autour de $Oz$ et par translation le long de $Oz$. Donc $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{e_z}$.
- Contour d'Ampère : on choisit un rectangle situé dans un plan $\theta$ = Cte dont un côté est parallèle à $Oz$ à $r < a$ et l'autre également parallèle à $Oz$ mais avec $r > a$.
- Circulation de $\vec{B}$ : sur deux côtés, $\vec{B}$ est perpendiculaire au déplacement et le champ est nul à l'extérieur. Donc on a

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = B(r,t)\ell$$

- Courants enlacés : $I_{\mathrm{enl}} = \dfrac{N\ell}{H} i(t)$
- Synthèse : $\vec{B}(M,t) = \mu_0 \dfrac{N}{H} i(t)\vec{e_z}$.

**III.** Pour qu'il y ait mouvement, il faut que les charges qui sont sur le pourtour de la spire subissent des forces électriques, donc qu'il existe un champ électrique.

Or, les variations temporelles de $\vec{B}$ sont source d'un champ électrique induit que l'on peut calculer grâce à l'équation de Maxwell-Faraday.

Pour trouver l'expression du champ électrique $\vec{E}$ induit, il faut d'abord étudier les symétries et les invariances de $\vec{B}$.

**Symétrie :** en un point $M$ quelconque, le plan $(M, Oz)$ est plan de symétrie du champ magnétique $\vec{B}(t)$. Donc $\vec{E}$ est orthoradial.

**Invariance :** il y a invariance par rotation autour de l'axe $Oz$ du champ $\vec{B}(t)$, donc $\vec{E} = E(r,z)\vec{u_\theta}$.
Le rotationnel en cylindrique n'est pas connu en général donc appliquer le théorème de Stokes est la meilleure méthode ici.
Choix d'un contour circulaire, d'axe $Oz$, de rayon $r$ et orienté par $\vec{u_\theta}$. La circulation de $\vec{E}$ vaut $2\pi r E(r,z)$.
*Remarque : on garde z dans un «bon» intervalle pour pouvoir négliger les effets de bord.*
Le flux de $\vec{B}$ vaut

$$\phi = B(t)\pi r^2 \text{ si } r < a \qquad \phi = B(t)\pi a^2 \text{ si } r > a.$$

Finalement :

$$E(r,z) = -\frac{\mu_0 N r}{2H}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ si } r < a \qquad E(r,z) = -\frac{\mu_0 N a^2}{2Hr}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ si } r > a$$

Pendant la phase transitoire, le champ magnétique est variable. À travers le champ électrique induit $\vec{E}$, chaque élément de longueur de la spire chargée, de charge $\delta Q$, subit une force

$$\vec{\delta F} = \delta Q \vec{E}$$

La résultante de ces actions est nulle, mais pas le moment par rapport à l'axe de rotation. D'où la mise en rotation.
En introduisant le moment d'inertie $J$ de la spire par rapport à l'axe $Oz$, la loi du moment cinétique scalaire appliquée à la spire s'écrit

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \int_{\text{spire}} bE(b,0)\delta Q = -\mu_0\frac{NQb^2}{2H}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad \text{si } b < a$$

En intégrant, il vient $\omega = -\dfrac{\mu_0 Q N b^2 I_0}{2JH}$, ou encore $\omega = -\dfrac{QB_0}{2m}$ en utilisant $J = mb^2$.
*Remarque :* on propose ici une estimation numérique où c'est au candidat de fournir des valeurs numériques «raisonnables».
Prenons $m = 0{,}02\,\mathrm{kg}$, $Q = 1\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ et $B_0 = 1\,\mathrm{T}$, ce qui est plutôt fort. Il vient $\omega = 2{,}5\times10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. C'est très faible, c'est de l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire de rotation terrestre autour des pôles.
*Remarque : la valeur de Q n'est pas fondamentale. On peut s'appuyer sur la valeur de la charge stockée sur une armature d'un condensateur pour estimer un OdG, mais ce n'est pas la même situation physique. L'idée est de susciter une initiative.*
*Remarques :*

- On peut demander de commenter le signe de $\omega$ en liaison avec la loi de Lenz, comme on peut demander d'anticiper sur ce sens de rotation avant les calculs.
- On peut aussi remarquer que le résultat ne dépend pas du temps qu'on met à établir $I_0$.
- On peut aussi commenter le fait qu'il y aurait encore un effet si la spire avait un rayon $b > a$, dans un domaine où le champ magnétique est nul...

**IV.** Le vecteur de Poynting vaut

Le flux sortant du vecteur de Poynting à travers le solénoïde vaut

$$\oiint \vec{\Pi}\cdot\vec{\delta S} = -\pi a^2 H \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

Or la densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit $\dfrac{B^2}{2\mu_0}$ par définition. Comme le champ magnétique est uniforme au sein du solénoïde, l'énergie magnétique stockée vaut $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \pi a^2 H\dfrac{B^2}{2\mu_0}$.
Finalement, on a $\oiint \vec{\Pi}\cdot\vec{\delta S} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}$. Cela veut dire que l'énergie électrique stockée est négligeable devant l'énergie magnétique (ce qui peut être assez logique dans le cadre de l'ARQS).
*Remarque :* On ignore ici ce qui se passe en dehors du solénoïde. On peut aussi en déduire l'inductance propre $L$ du solénoïde grâce à $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \dfrac{1}{2}Li^2$.

**V.** La rotation de la spire a-t-elle une influence ? En principe, oui. En pratique, ce serait un petit miracle si la spire se met en rotation (existence de frottements résiduels par exemple). La rotation de la spire chargée implique l'existence d'un courant électrique d'intensité $i_{sp}(t) = Q\omega(t)$, c'est-à-dire qu'on a une spire de courant. Cette spire crée à son tour un champ magnétique qui se superpose au champ magnétique créé par le solénoïde.
D'autre part, le flux magnétique variable dû à ce champ induit à travers le solénoïde est source d'une force électromotrice induite. Dans le cas de deux circuits en interaction magnétique, le coefficient de mutuelle inductance vérifie $M_{12} = M_{21} = M$. Le plus simple est de calculer le flux du champ créé par le solénoïde à travers la spire et identifier avec $Mi(t)$. On l'a fait plus haut donc, par identification, $M = \mu_0\dfrac{N}{H}\pi b^2$ si $b < a$.
La force électromotrice induite s'écrit alors

$$e_{\text{ind}}(t) = -M\frac{\mathrm{d}i_{sp}}{\mathrm{d}t} = MQ\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$