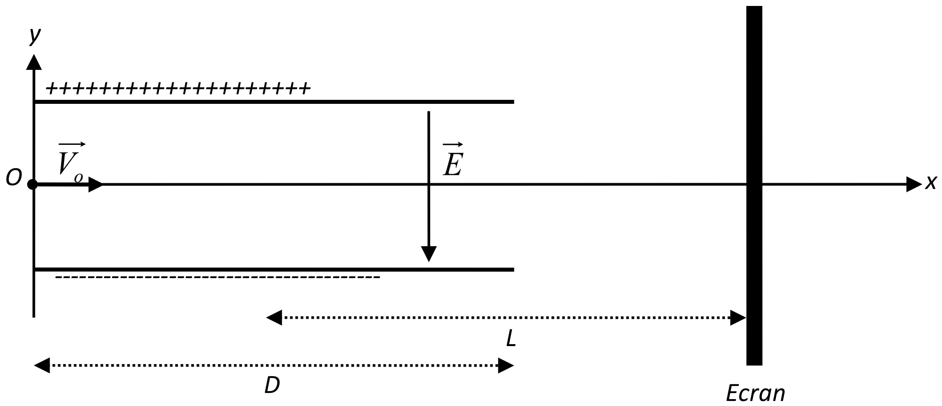
MOUVEMENTS D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS DIFFERENTS CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES CONSTANTS ET UNIFORMES.

I. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE UNIFORME.

Une particule (proton ou électron) de masse m et de charge q pénètre entre les plaques d'un condensateur plan où règne un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$. La particule pénètre perpendiculairement au champ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$.

On introduit le repère (O,x,y,z) ,fixe dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen, tel que O coïncide avec la position initiale de la particule chargée, et tel que : $\overrightarrow{E}=-E\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{V_0}=V_0\overrightarrow{u_x}$.

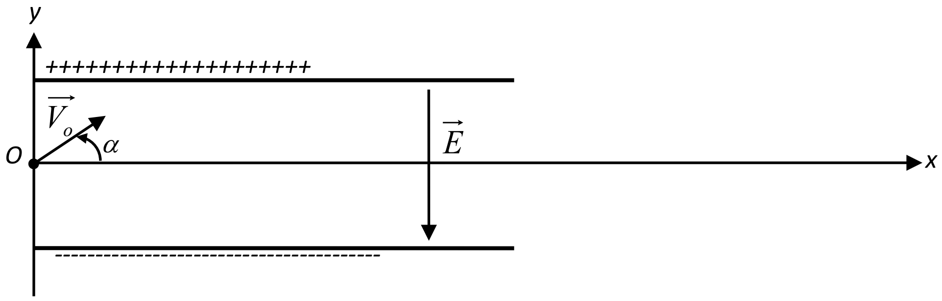


1. Montrer que, pour un champ usuel de 10^4 V /m, le poids peut être négligé devant la force électrique agissant sur la particule.
2. Etablir l'équation de la trajectoire de la particule à l'intérieur des armatures et notamment montrer que son mouvement est plan.
3. Montrer qu'à l'extérieur des armatures, le mouvement de la particule est, dans une première approximation, rectiligne uniforme.
4. Déterminer la position du point d'impact de la particule sur un écran situé à la distance L du centre du système déflecteur, la longueur des plaques étant égale à D. Donner notamment la valeur de la déflection électrique δ_E, correspondant à la coordonnée y du point d'impact.
5. Représenter l'allure de la trajectoire d'une particule chargée négativement puis d'une particule chargée positivement sur le schéma de la question a.
6. AN : D = 5 cm ; L = 17,5 cm ; E = 10^4 V/m ; $V_0 = 10^5 m.s^{-1}$. Dans le cas d'un électron puis d'un proton, déterminer la valeur de δ_E.

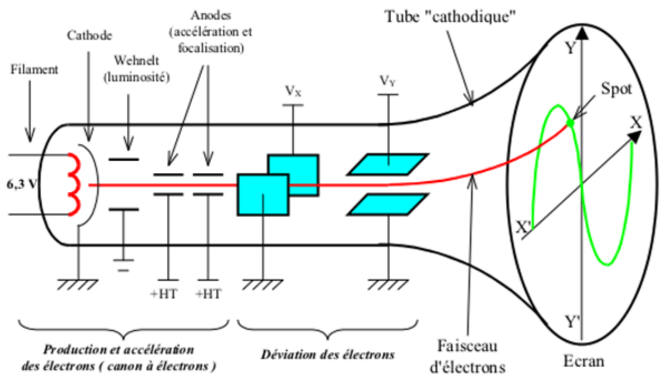
La particule étudiée précédemment pénètre maintenant entre les deux plaques du condensateur avec une vitesse V_o faisant un angle α avec l'axe (Ox).

7. Montrer que le mouvement de la particule entre les deux plaques est parabolique et notamment établir l'équation de la trajectoire.

8. Mettre en évidence l'analogie du mouvement de la charge avec celui d'une masse m dans le champ de pesanteur.
9. Etudier le cas particulier où $\alpha = 90°$.



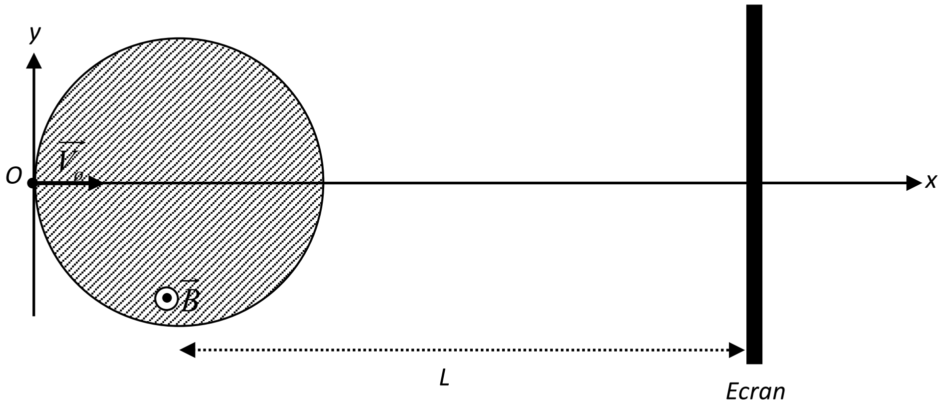
Le cas où $\alpha = 0$ correspond au tube cathodique classique (utilisé dans les anciens téléviseurs, les oscilloscopes analogiques…) dont voici le schéma de principe :



II. Mouvement d'une particule chargee dans un champ magnetique uniforme.

Cette même particule pénètre dans une région cylindrique de rayon R = D/2 où règne un champ magnétique, $\vec{B}$, uniforme parallèle aux génératrices du cylindre. Sa vitesse initiale, $\vec{V_0}$, orthogonale à $\vec{B}$, est dirigée vers l'axe de symétrie de révolution du cylindre. La particule est repérée par son impact sur un écran situé à la distance L (L > R) de l'axe de révolution du cylindre.

On introduit le repère (O,x,y,z),fixe dans la référentiel du laboratoire supposé galiléen, tel que :O coïncide avec la position initiale de la particule ; $\vec{B}=B\vec{u_z}$ et $\vec{V_0}=V_0\vec{u_x}$;le plan de l'écran est parallèle au plan(Oyz).



10. Montrer que, dans l'approximation non relativiste, le poids peut être négligé devant la force magnétique agissant sur la particule (les vitesses restant supérieures à 10^5m/s).
11. Montrer que le mouvement de la particule dans le champ $\vec{B}$ est circulaire uniforme. Donner l'expression du rayon du cercle ρ et montrer que la position du centre du cercle dépend du signe de la charge de la particule (On notera respectivement C_+ et C_- les centres des cercles correspondant à une particule de charge positive et négative).
12. A quelle vitesse angulaire le cercle est-il parcouru par la particule ? Comment nomme-t-on cette pulsation ?
13. Donner l'expression de la déviation magnétique δ_M de la particule correspondant à la coordonnée y du point d'impact. Dans le cas d'une déviation faible, la comparer à la déflection électrique δ_E obtenue à la question I-
14. Tracer l'allure de la trajectoire d'une particule de charge négative, puis d'une particule de charge positive. Placer les points C_+ et C_- correspondants.

Application :

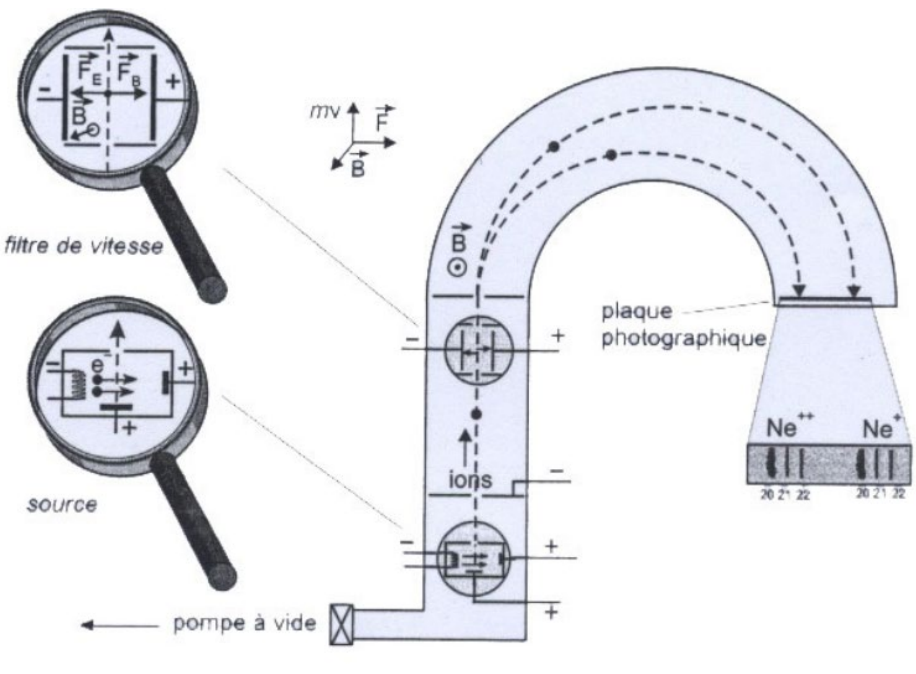
SPECTROGRAPHE DE MASSE.

On veut séparer les deux isotopes du brome $_{79}$ Br et $_{81}$Br dont les masses m_1 et m_2 sont proportionnelles aux nombres de masse A_1= 79 et A_2= 81. Les atomes de brome sont d'abord ionisés dans une chambre d'ionisation en ions Br^- d'où ils sortent par la fente F avec une vitesse sensiblement nulle . Puis ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme entre les plaques P_1 et P_2; la tension entre ces plaques vaut : $U_{P2P1} = V_{P2}- V_{P1}= Uo=4.\ 10^3$ V. Enfin, les ions pénètrent, à travers la fente F' et avec un vecteur vitesse vo, perpendiculaire aux plaques, dans une région (chambre de déviation) où règne un champ magnétique uniforme à perpendiculaire au plan de la figure (B = 0,1T). Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.

1. Montrer que, quel que soit l'isotope, les ions pénètrent en F' dans la chambre de déviation avec la même énergie cinétique Ec. Calculer la valeur de Ec en joules puis en keV. Les ions ont-ils la même vitesse en F'?
2. Donner le sens du vecteur B qui permet aux ions d'être déviés vers le bas
3. Rappeler, sans démonstration, l'expression littérale du rayon R du cercle en fonction de la masse de l'ion, de sa charge, de la tension accélératrice Uo et du champ magnétique B. Conclure.
4. Calculer R_1 et R_2.

Le spectrographe décrit ici est le spectrographe de masse de Brainbrige,

il existe de nombreux autres spectrographes de masse, plus récents.

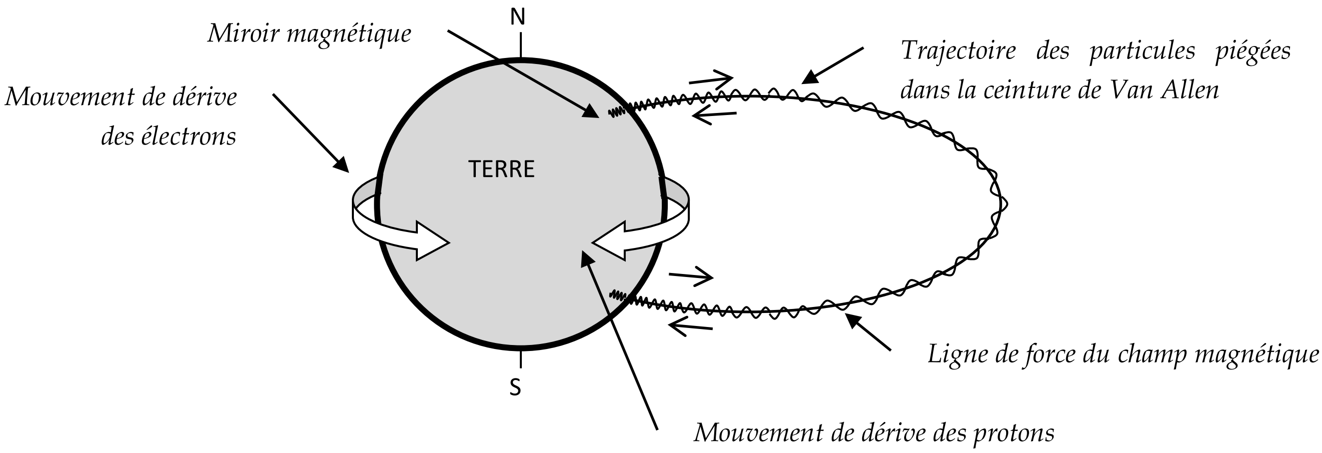


La particule pénètre maintenant dans une région où règne un champ $\vec{B}$ uniforme mais avec une vitesse initiale, $\vec{V_0}$, quelconque. On introduit le repère cartésien (O,x,y,z) tel que O coïncide avec la position initiale de la particule et l'axe (Oz) est porté par le champ $\vec{B}$.

15. Etablir les équations horaires en coordonnées cartésiennes de la trajectoire. On introduira la pulsation cyclotron : $\omega_c = \frac{qB}{m}$. Tracer l'allure de la trajectoire.
16. Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération de la particule en coordonnées cylindriques.
17. Déterminer la vitesse ainsi que l'accélération de la particule dans la base locale de Frenet. Quelle distance a parcourue la particule au bout d'un temps t quelconque ?

Application :

MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGEES DANS LA MAGNETOPHERE TERRESTRE – MIROIRS MAGNETIQUES



Dans une première approximation, le champ magnétique terrestre correspond au champ crée par un dipôle magnétique qui serait placé au centre de la terre. Ce champ retient dans l'espace un grand nombre de particules chargées provenant du soleil (essentiellement des protons et des électrons). Ces particules piégées forment deux anneaux appelés ceintures de Van Allen l'une interne, à une altitude d'environ 10000 km, l'autre externe, à une altitude d'environ 60000 km.

Ces particules ont un mouvement périodique complexe, pouvant se décomposer en trois mouvements. Le premier est un mouvement de rotation autour du champ magnétique local. Le second est un mouvement de va-et-vient entre les deux hémisphères. A ces deux mouvements se superpose une dérive longitudinale qui amène les particules à tourner autour de la terre sur une coquille magnétique.

L'objectif de ce problème est l'étude des deux premiers mouvements des particules chargés.

1. Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme.

Dans un premier temps on étudie le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un champ magnétique uniforme $\vec{B_0}$. On introduit le repère (O,x,y,z) fixe dans le référentiel terrestre supposé ici galiléen Le champ magnétique peut alors s'écrire : $\vec{B_0} = B_0\vec{e_z}$.

1.1. Etude du mouvement de la particule chargée.

1.1.1. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la particule dans le référentiel terrestre et établir le système d'équations différentielles vérifié par les coordonnées (x(t),y(t),z(t)) de la particule. On introduira la pulsation cyclotron : $\omega_C = \frac{qB_0}{m}$ et on négligera le poids devant la force magnétique agissant sur la particule.

1.1.2. Intégrer ces équations différentielles et donner les expressions de x(t), y(t) et z(t) en sachant qu'à t = 0, la particule a une vitesse $\overrightarrow{V_0}=\dot{y}_0\overrightarrow{e_y}+\dot{z}_0\overrightarrow{e_z}$ (on prendra $\dot{y}_0>0$)et quelle se trouve au point $A\left(-\frac{\dot{y}_0}{\omega_c},0\right)$. Montrer que la trajectoire de la particule est une hélice dont on donnera le rayon R et le pas h. Quelle est la signification physique de ω_C ?

1.1.3. Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération de la particule en coordonnées cylindriques.

On décompose la vitesse de la particule de la manière suivante : $\vec{V}=\overrightarrow{V_z}+\overrightarrow{V_\perp}$ où $\overrightarrow{V_z}$ est la composante de la vitesse colinéaire au champ et $\overrightarrow{V_\perp}$ est la composante de la vitesse perpendiculaire au champ.

1.1.4. Montrer qu'au cours du mouvement, les normes de ces trois vecteurs restent constantes et donner leurs expressions en fonction de $\dot{y}_0$ et $\dot{z}_0$.

1.2. Application à l'étude du mouvement des particules chargées dans la ceinture de Van Allen.

Dans une première approximation, on peut considérer que, localement et loin des pôles, le champ magnétique terrestre est uniforme et qu'ainsi la particule a un mouvement hélicoïdal autour des lignes de force du champ. Dans le plan de l'équateur, on relève la période de rotation des électrons autour des lignes de force du champ : $T_{c,e}=100\mu s$

1.2.1. Donner la pulsation cyclotron correspondante et en déduire la valeur du champ magnétique local.

1.2.2. Quelle serait la période de rotation $T_{c,p}$ d'un proton dans ce même champ magnétique local ?

2. Mouvement de particule dans un champ faiblement non uniforme.

Dans un deuxième temps on tient compte de la non uniformité du champ magnétique terrestre, que l'on notera ici $\vec{B}$, afin d'expliquer le mouvement de va et vient des particules entre les deux pôles.

On modélise le champ de la manière suivante : En un point M de l'espace, repéré par ses cordonnées cylindriques, le champ peut s'écrire : $\vec{B}(M)=B_\rho\vec{e}_\rho+B_z\vec{e}_z$ où $B_z(\rho,z)=B_z(z)$ et $B_\rho(\rho,z)=-\frac{\rho}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$.

2.1. Approche théorique.

2.1.1. Montrer que en tout point M de l'espace, on a : $\dot{z}B_\rho=-\frac{\rho}{2}\dot{B}_z$

2.1.2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la particule chargée et en utilisant le résultat précédent, montrer que la trajectoire d'une charge vérifie : $m\rho^2\dot{\theta}+\frac{qB_z\rho^2}{2}=cste$

2.1.3. Sachant que le champ magnétique est faiblement non uniforme, démontrer, en utilisant judicieusement les résultats de la première partie, que l'équation de la question précédente devient : $\frac{V_\perp^2}{B_z}=cste$.

2.2. Miroirs magnétiques dans les ceintures de Van Allen.

On considère que la modélisation précédente est applicable au champ magnétique terrestre .Dans ce paragraphe, seules des réponses qualitatives sont demandées.

2.2.1. Lorsque la particule se dirige vers les zones de champ fort (pôles), montrer que sa vitesse $\overrightarrow{V_z}$ diminue ainsi que le pas de l'hélice.

2.2.2. En déduire que la vitesse $\overrightarrow{V_z}$ peut s'annuler. Quel est alors le mouvement de la particule ? En réalité cette situation est instable et la particule repart en sens inverse : on parle de miroir magnétique.

2.2.3. Montrer que l'altitude des miroirs magnétiques diminue lorsque la vitesse initiale $\overrightarrow{V_z}$ augmente. Quel phénomène peut-on observer si cette vitesse est suffisamment grande ?

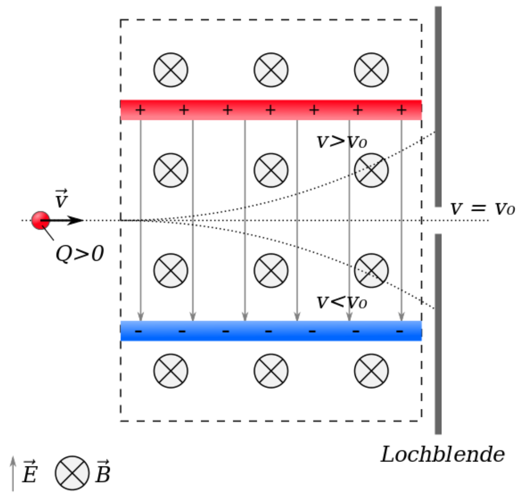
18. Reprendre les questions 15, 16 et 17 en tenant compte des frottements fluides (modélisant les collisions) de la forme :

$$\vec{F}_f = -\alpha\,\vec{V}$$

III. Mouvement d'une particule chargee dans des champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ uniformes.

1. De manière générale donner l'expression de la force qui agit sur la particule.
2. Montrer qu'en orientant convenablement les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$, une particule chargée ayant une vitesse initiale $\vec{V_0}$ convenablement choisie, que l'on précisera, passera sans que sa vitesse soit modifiée (on notera pour la suite cette vitesse $\vec{V}_d$).

Ce système est un filtre de vitesse très précis, appelé filtre de Wien, que l'on peut utiliser avant un spectrographe de masse qui sépare alors les particules ayant des rapports q/m différents.



3. *La particule pénètre dans un espace où règnent des champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ orthogonaux entre eux avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ orthogonale à $\vec{B}$.*
   On introduit le repère (O,x,y,z),fixe dans la référentiel du laboratoire supposé galiléen, tel que : O coïncide avec la position initiale de la particule.

On pose : $\vec{B}=B\vec{u_x}$, $\vec{E}=E\vec{u_z}$ et $\vec{V_0}=\dot{y}_0\vec{u_y}+\dot{z}_0\vec{u_z}$

3.1. Montrer que de manière générale le mouvement peut se décomposer en un mouvement de translation à la vitesse $\vec{V_d}$ et d'un mouvement de rotation de rayon $\rho=\frac{mV_0}{|q|B}$.

3.2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer les expressions de x(t), y(t) et z(t) en tenant compte des conditions initiales.

3.3. Montrer que dans le cas particulier où $\vec{V_0}=\vec{O}$ la trajectoire de la particule est une cycloïde. Tracer l'allure de la trajectoire.

3.4. Montrer que dans le cas particulier où $\dot{z}_0=0$ et $\dot{y}_0=\frac{2E}{B}$ la trajectoire est une autre cycloïde que l'on représentera.

3.5. Montrer que dans le cas où $\dot{z}_0=0$ et $\dot{y}_0$ est quelconque, on observe différents types de trajectoire pour la particule suivant la valeur de $\dot{y}_0$: distinguer les cas où $0<\dot{y}_0<E/B$; $E/B<\dot{y}_0<2E/B$ et $2E/B<\dot{y}_0$. Analyser qualitativement la trajectoire dans chaque cas et à l'aide d'un outil informatique tracer l'allure des trajectoires. A quoi correspond le cas où $\dot{z}_0=0$ et $\dot{y}_0=E/B$?

IV. COMMENT PIEGER UNE PARTICULE CHARGEE ?

1. LE PIEGE DE PAUL

I. Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss. Justifier qu'il est impossible de piéger une particule chargée dans une zone vide de charge à l'aide uniquement d'un potentiel électrostatique.

II. On considère un champ électrostatique quadripolaire dérivant du potentiel électrostatique suivant :

$$V = \frac{V_0}{4a^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

a étant la distance caractéristique du piège.

Montrer que, quelque soit le signe de V_0, il est en effet impossible de piéger une particule chargée dans ce champ.

III. Le piège de Paul est un dispositif à champ quadripolaire variable dans lequel existe le potentiel variable suivant :

$$U(t) = \frac{V(t)}{4a^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) \text{ avec } V(t) = V_0 \cos \omega_p t$$

1. Justifier qualitativement qu'il est en effet possible de piéger une particule chargée dans un piège de Paul
2. Les équations du mouvement d'une particule, de charge q et de masse m, placée dans le piège de Paul, appelées équations de Mathieu, sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} = 2q_x \cos(2\tau)\, x \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = 2q_y \cos(2\tau)\, y \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = 2q_z \cos(2\tau)\, z \end{cases}$$

τ, q_x, q_y et q_z étant des constantes adimensionnées.

Déterminer τ, q_x, q_y et q_z.

3. A l'aide d'un raisonnement physique simple, proposer une condition sur ω_p pour que le piège fonctionne.
4. Une étude plus approfondie des équations de Mathieu, montre que les solutions sont stables si :

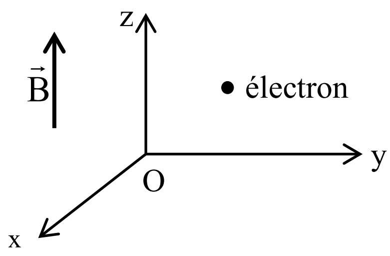
$$0 \leq |q_x|\,,\ |q_y|\,,\ |q_z| \leq 0.908$$

Déterminer une condition sur ω_p pour que le piège fonctionne.

2. PIEGE DE PENNING

On étudie un piège de Penning permettant de confiner un électron au voisinage de l'origine O du repère associé au référentiel galiléen de l'étude.

Dans cette région règnent :



- ✓ Un potentiel électrostatique $V = \frac{U}{a^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$
- ✓ Un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}$ selon Oz.

I- Ecrire les équations cartésiennes du mouvement de l'électron.

II- a) On suppose que le champ magnétique est nul.

- ✓ Décrire qualitativement le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une première pulsation caractéristique notée ω_z.
- ✓ En prenant U = 10 V et a = 1 cm, donner un ordre de grandeur de ω_z.
- ✓ L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?

b) On suppose que le potentiel électrostatique est nul.

- ✓ Décrire qualitativement le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une deuxième pulsation caractéristique notée ω_c.
- ✓ Donner un ordre de grandeur de ω_c.
- ✓ L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?

III- a) Réécrire les équations du mouvement en fonction des deux pulsations ω_z et ω_c .

b) Montrer que l'électron peut avoir un mouvement horizontal circulaire d'équations $x(t) = A\cos\omega t$ et $y(t) = A\sin\omega t$, à condition de choisir un champ magnétique suffisamment intense. Quelles sont alors les valeurs possibles pour la pulsation ω ?

IV- La trajectoire de l'électron a l'allure suivante. Commenter compte tenu des résultats précédents.