

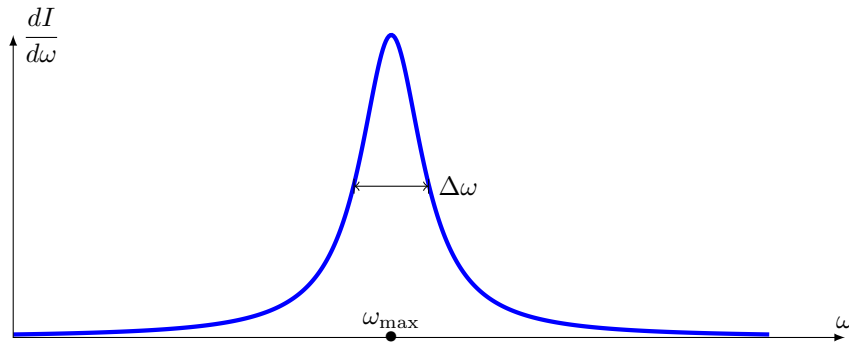
I Modèle classique de Thomson de l'atome

- Tout plan passant par O est plan de symétrie de charges donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces plans, c'est-à-dire radial, $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. L'invariance de révolution autour de O impose aussi $E(M) = E(r)$. On applique alors le théorème de Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ à une sphère de centre O et de rayon r , la charge intérieure à cette sphère étant $Q_{\text{int}} = e\left(\frac{r}{a}\right)^3$ et le flux de $\vec{E}$ étant $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$. Il reste donc $\boxed{\vec{E}_n = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_r}$. Lors du mouvement d'un électron dans l'atome d'hydrogène, $\vec{F} = -e\vec{E}$ donc $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \vec{e}_r$ s'identifie à la relation de l'énoncé si $\boxed{\omega_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a^3}}}$.
- La force est centrale et le mouvement est plan. Si l'électron est initialement immobile, ce mouvement est même rectiligne et on peut poser $\vec{e}_r = \vec{e}_x = \text{cte}$. L'équation du mouvement $\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$ (on adopte ici une notation inhabituelle, $r(t)$ pouvant devenir négatif) a comme solution, au vu des conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ la forme classique $\boxed{r(t) = r_0 \cos(\omega_0 t)}$. L'énergie mécanique est constante, somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m\omega_0^2}{2} r_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$ et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k r^2$ (on la prend donc ici nulle pour la position d'équilibre en O de l'électron) ; après simplification, $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2}$.
- Compte tenu que $\ddot{r} = -\omega_0^2 r_0 \cos(\omega_0 t)$, la puissance moyenne rayonnée prend la forme $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2 \omega_0^4 r_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$ (la moyenne du cosinus carré est 1/2 sur un nombre entier de ses périodes) qu'on écrit encore $\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \Gamma \mathcal{E}}$ avec $\boxed{\Gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}}$. Le bilan énergétique du mouvement de la particule, compte tenu des pertes par rayonnement, s'écrit alors $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\langle \mathcal{P} \rangle$ donc $\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\Gamma \mathcal{E}}$ qui s'intègre bien en $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp(-\Gamma t)$ avec la constante de temps $\boxed{\frac{1}{\Gamma} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_0^2} = \frac{3\epsilon_0 m \lambda_0^2 c}{2\pi e^2}}$ ou $\boxed{\frac{1}{\Gamma} = 1,06 \cdot 10^{-8} \text{ s}}$; c'est à la fois le temps caractéristique d'oscillation électronique et le temps de cohérence de la raie, en l'absence d'autres phénomènes limitant cette cohérence. Le calcul est justifié par le fait que $\boxed{\frac{1}{\Gamma} \gg T_0}$ puisque $\boxed{T_0 = \frac{\lambda_0}{c} = 1,62 \cdot 10^{-15} \text{ s}}$, ce qui justifie les approximations faites pour le calcul de l'énergie mécanique.

II Émission et absorption de rayonnement

- On ajoute à l'étude ci-dessus le terme de frottement, $\boxed{\ddot{r} + \omega_0^2 \alpha \dot{r} + \omega_0^2 r = 0}$. Le polynôme caractéristique $x^2 + \omega_0^2 \alpha x + \omega_0^2$ a des racines complexes puisque $\omega_0 \alpha \ll 1$; on les écrit $x = -\frac{\omega_0^2 \alpha}{2} \pm i\omega$ avec $\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 \alpha^2}{4}}}$. La forme générale $r(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \alpha}{2} t\right) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ est reliée aux conditions initiales par $r_0 = A$ et $0 = -\frac{\omega_0^2 \alpha}{2} A + B\omega$. La solution exacte et complète de la solution, $\boxed{r(t) = r_0 \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \alpha}{2} t\right) \left[\cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 \alpha}{2\omega} \sin(\omega t)\right]}$ peut, compte tenu de $\omega \sim \omega_0$ et $\omega_0 \alpha \ll 1$, être remplacée par $\boxed{r(t) = r_0 \cos(\omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \alpha}{2} t\right)}$; l'amplitude des oscillations, $|r_0| \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \alpha}{2} t\right)$, $\boxed{\text{diminue}}$ exponentiellement du fait des phénomènes dissipatifs.
- On a immédiatement $\boxed{\frac{2}{\Gamma} = \frac{2}{\omega_0^2 \alpha}}$ avec numériquement $\Gamma = 9,38 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ donc $\boxed{\frac{2}{\Gamma} = 2,13 \cdot 10^{-8} \text{ s}}$ exactement compatible avec la partie précédente ; par ailleurs l'expression de ω admet un développement au premier ordre non nul de la forme $\omega = \omega_0 - \delta\omega$ avec $\boxed{\delta\omega = \frac{\omega_0^3 \alpha^2}{8}}$.

6. Selon qu'on utilise le temps d'atténuation de l'énergie $1/\Gamma$ ou celui des oscillations 2Γ , on peut proposer deux expressions de la longueur de cohérence, $\mathcal{L}_{\text{nat}} = \frac{2c}{\Gamma}$ ou bien seulement $\mathcal{L}'_{\text{nat}} = \frac{c}{\Gamma}$. Le rayonnement émis est donc seulement **quasi-monochromatique** avec une largeur spectrale $\Delta\lambda$ donnée par la relation générale avec la longueur de cohérence, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \sim \frac{\lambda_0}{\mathcal{L}_{\text{nat}}}$.
7. Numériquement, on trouve $\mathcal{L}_{\text{nat}} = 6,4 \text{ m}$; cette valeur exceptionnellement élevée permet de faire une expérience d'interférences avec, par exemple, une très grande valeur de la différence de marche, donc des franges qui resteraient **bien contrastées** même pour un très fort déplacement du miroir mobile de l'interféromètre. Il ne sera par contre pas possible de mettre cet effet en évidence et donc de mesurer la longueur de cohérence définie ici avec un interféromètre « de Lycée », dont le déplacement du chariot est limité à une dizaine de centimètres.
8. Le maximum est atteint pour $\omega = \omega_{\text{max}} = \omega_0 - \Delta\omega$ et la mi-hauteur pour $\omega - \omega_{\text{max}} = \pm \frac{\Gamma}{2}$ donc la largeur à mi-hauteur est $\Delta\omega = \Gamma$; elle est faible puisqu'on a vu que $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \omega_0 \tau \ll 1$. Le tracé s'en déduit :



En valeurs relatives, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega}$ donc $\Delta\lambda = 2\pi c\tau$ soit $\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ nm}$, valeur extrêmement faible (et donc non mesurable simplement). On a par ailleurs $\frac{\delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0^3 \tau^2}{8\omega_0^2 \tau}$ donc $\frac{\delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 \tau}{8} = 3,0 \cdot 10^{-9}$; cet écart n'est pas repérable à l'intérieur de la largeur naturelle de la raie.

9. L'effet Doppler est un décalage de la fréquence d'un signal perçu par un observateur en fonction de la vitesse de déplacement relative de l'émetteur, par rapport à la fréquence propre d'émission. Pour un gaz monoatomique, $u = \sqrt{\frac{3RT}{\mathcal{M}}}$ où $R = k_B \mathcal{N}_A$ donc $u = 570 \text{ m/s}$ donc $\Delta\omega_D = 1,47 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$ et finalement $\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D} \simeq 6,7 \cdot 10^{-3}$; c'est donc l'effet Doppler qui est (très largement !) responsable du défaut de cohérence temporelle de la raie étudiée, avec $\mathcal{L}_D = \frac{c}{\Delta\omega_D} = 2,0 \text{ cm}$. Pour que les deux effets redeviennent comparables (et donc pour espérer

mesurer la largeur naturelle, il faudrait avoir $\Delta\omega_D < \Delta\omega$ ou après calculs $T < T_0$ où $\frac{3RT_0}{\mathcal{M}} = \left(\frac{c \Delta\omega}{2\omega_0^2} \right)^2$ donc $T_0 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ K}$, valeur possible mais difficile.

III Expérience de Faget et Fert

10. Les électrons forment l'équivalent d'une onde monochromatique de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{mv}$. On observe donc un phénomène d'interférences semblable au biprisme de Fresnel en Optique : le cumul des impacts électroniques forme des **franges** rectilignes et équidistantes, perpendiculaires au segment joignant les sources $S_1 S_2$.
11. Tout plan passant par le fil est un plan de symétrie des charges, et c'est aussi le cas des plans perpendiculaires à ce plan. Le champ électrique est contenu dans l'intersection de ces plans, il est donc radial (au sens cylindrique) : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$. L'invariance de rotation autour du fil, et l'invariance de translation le long du fil imposent $E(M) = E(r)$. Le théorème de Gauss, appliqué à un cylindre de rayon r et de hauteur h , s'écrit $2\pi r h E(r) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$; on aura donc $rE(r) = r_0 E_0$ donc $\vec{E} = E_0 \frac{r_0}{r} \vec{e}_r$. La relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ s'écrit $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ donc $V(r) = -E_0 r_0 \ln(r) + \text{cte}$.
12. $V(f) - V(r_0) = -E_0 r_0 \ln \frac{f}{r_0}$ qu'on écrit encore $U = V(r_0) - V(f)$ donc $U = \frac{mv^2 \beta}{\pi e} \ln \frac{f}{r_0}$ et, numériquement, $U = 29 \text{ V}$.

13. La figure d'interférences se forme progressivement, par accumulation progressive d'électrons qui arrivent un par un sur l'écran.
14. L'onde Ψ est une onde de probabilité de présence, c'est-à-dire que la probabilité d'observer l'électron dans un volume infinitésimal d^3V est $|\Psi|^2 d^3V$.
15. La formule classique $i = \frac{\lambda D}{a}$ devient ici $\delta x = \frac{\lambda Z}{2f\beta}$ où $\lambda = \frac{h}{mv}$; finalement, $\delta x = \frac{5h}{mv\beta}$. Si on augmente U , v augmente donc δx diminue.
16. L'application numérique de $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ fournit $v \simeq 1,3 \cdot 10^8$ m/s qui est assez proche de c ; l'approximation non relativiste n'est donc pas raisonnable.

IV Déviation du césium par un faisceau lumineux

17. $\|\vec{p}\| = \frac{h}{\lambda}$ (relation de De Broglie).
18. La conservation de la quantité de mouvement des atomes de Césium après absorption d'un photon impose $mv\vec{e}_z + \frac{h}{\lambda}\vec{e}_x = m\vec{v}'$ donc $v'_z = v$ et $v'_x = \frac{h}{\lambda m}$; la nouvelle trajectoire est donc déviée d'un angle θ donné par $\tan \theta = \frac{h}{\lambda mv}$ avec pour déviation à l'arrivée $\delta x = d \tan \theta$ donc $\delta x = \frac{h}{\lambda mv} d$. Numériquement, $m = \frac{\mathcal{M}}{N_A} = 2,21 \cdot 10^{-25}$ kg donc $\delta x = 8,1 \mu\text{m}$.
19. L'effet est faible donc pratiquement additif pour l'absorption successive de plusieurs photons. La déviation observée est donc $x = N_\gamma \delta x \simeq 40 \mu\text{m}$ donc $N_\gamma = \frac{x}{\delta x} \sim 5$.
20. La largeur du pic non irradié est simplement lié à la dispersion lié à la valeur finie de ϵ ; celle du pic irradié provient de la dispersion sur le nombre effectif de photons absorbés.

V Mesures expérimentales de durées de vie de certains états excités de l'hélium

21. Toute interaction avec une molécule d'air se traduirait par l'absorption des atomes du jet.
22. Les atomes d'hélium sont ionisés pour pouvoir être accélérés par la différence de potentiel de 1 kV imposée entre les plaques du condensateur.
23. La désexcitation produit un photon d'énergie $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{hc}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}_1}$ ou numériquement $\lambda = 460 \text{ nm}$.
24. La conservation de l'énergie impose $\frac{1}{2}m(v^2 - v_F^2) = eU$ donc $v \simeq \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ soit $v = 2,0 \cdot 10^5$ m/s.
25. Pour qu'un atome se désintègre entre t et $t + dt$, il faut qu'il soit encore excité à l'instant t (probabilité $\mathcal{P}(t)$) et qu'il se désintègre entre t et $t + dt$ (probabilité $d\mathcal{P}'$). La probabilité demandée est donc $\mathcal{P}(t) \cdot d\mathcal{P}'$. Pour déterminer cette dernière, notons N_0 le nombre d'atomes excités à $t = 0$; ceux qui sont encore excités à t sont en nombre $N(t) = N_0 \mathcal{P}(t)$ et ceux qui sont encore excités à $t + dt$ en nombre $N(t + dt)$. La différence, $\delta N = N(t) - N(t + dt) = -\frac{dN}{dt}dt$, correspond à ceux qui se sont désintégrés pendant l'intervalle $[t, t + dt]$, avec donc la probabilité de désintégration $d\mathcal{P}' = \frac{\delta N}{N(t)}$ soit $d\mathcal{P}' = \frac{dt}{\tau}$. Finalement, la probabilité de désintégration demandée est $\frac{dt}{\tau} e^{-t/\tau}$. Comme par ailleurs $dz = vdt$, on peut aussi écrire cette probabilité de désintégration $\frac{dz}{v\tau} e^{-z/v\tau}$.
26. L'élément observé, de volume Sdz , comporte n^*Sdz atomes de Césium. Le nombre de photons émis est alors $n^*Sdz \cdot \frac{dz}{v\tau} e^{-z/v\tau}$ par unité de temps, avec chacun l'énergie $\mathcal{E}_2$; l'énergie émise par unité de temps est donc $dI_e = \frac{n^*Sdz}{dt} \mathcal{E}_2 \frac{dz}{v\tau} e^{-z/v\tau}$ dont la proportion K est reçue par le détecteur, et $dI(z) = i(z)dz$ où $i(z) = \frac{n^*SK\mathcal{E}_2}{\tau} e^{-z/v\tau}$.
27. On identifie $\ell = v\tau$ donc $\tau = \frac{\ell}{v} = 1,1 \mu\text{s}$.

VI Irradiation d'une vapeur d'hydrogène atomique

28. On peut interpréter les deux pics comme suit : l'énergie $h\nu$ d'un photon et celle $\mathcal{E}_n$ ($n = 1$ ou 2) d'un électron dans l'atome peuvent ensemble suffire à l'ionisation (état électronique d'énergie potentielle nulle) et à produire un électron de vitesse v seulement si $h\nu + \mathcal{E}_n = \frac{1}{2}mv^2$; on a donc bien deux pics, selon l'énergie initiale de l'électron. La largeur des pics est associée aux incertitudes relatives aux valeurs de l'énergie initiale des atomes, donc à la température du gaz.

29. On sait que les règles de quantification de l'énergie de l'électron de l'atome de Bohr imposent $\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_i}{n^2}$. La

conservation de l'énergie assure $\frac{1}{2}mv_n^2 = h\nu + \mathcal{E}_n$ soit $v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}(h\nu - \mathcal{E}_i)}$ et $v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(h\nu - \frac{\mathcal{E}_i}{4}\right)}$.

30. $\frac{N(\mathcal{E}_2)}{N(\mathcal{E}_1)} = \exp\left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{k_B T}\right)$ où on sait que $\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{4}$; on a donc aussi $\ln \frac{N(\mathcal{E}_2)}{N(\mathcal{E}_1)} = \frac{3\mathcal{E}_1}{4k_B T}$ donc la température

demandée est $T = \frac{3|\mathcal{E}_1|}{4k_B} \left(\ln \frac{N(\mathcal{E}_1)}{N(\mathcal{E}_2)}\right)^{-1}$; numériquement, $T = 1,03 \cdot 10^4 \text{ K}$. Ce résultat est un peu plus élevé que la température connue pour la surface du Soleil.

31. $N = N(\mathcal{E}_1) + N(\mathcal{E}_2)$ donc $N = Ce^{-\frac{\mathcal{E}_1}{k_B T}} + Ce^{-\frac{\mathcal{E}_1}{4k_B T}}$ ou enfin $C = \frac{N}{e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{k_B T}} + e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{4k_B T}}}$.

32. $0 \leq \ell < n$ et $-\ell \leq m \leq \ell$, donc en tenant compte des deux états de spin, $g = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{-\ell}^{\ell} 2$ soit aussi $g =$

$\sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell+1) = 4\frac{n(n-1)}{2} + 2n$ ou enfin $g = 2n^2$. On a dans ce cas $C = \frac{N}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{n^2 k_B T}}}$ mais, pour $n \rightarrow \infty$,

$e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{n^2 k_B T}} \rightarrow 1$ donc la série qui figure au dénominateur est divergente.

33. Si $n \rightarrow \infty$, $r_n \rightarrow \infty$ et on ne peut plus considérer les états de valeurs trop élevées de n comme des états associés à un atome unique : on peut arrêter la somme lorsque r_n approche la distance interatomique moyenne.