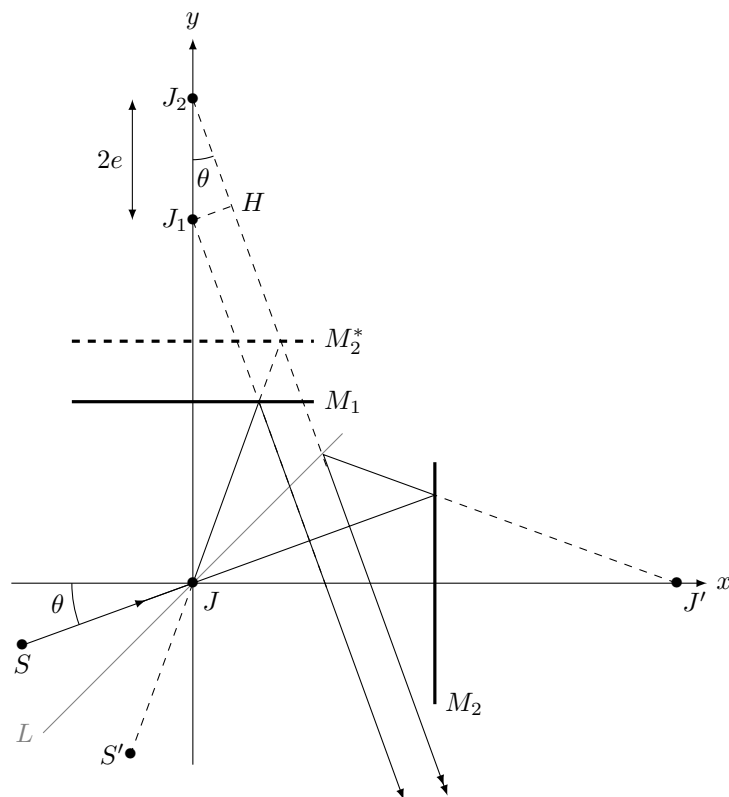


Corrigé centrale 1 PC 2021

I Interféromètre de Michelson et épaisseur d'une lame de savon

I.A-

1. Voilà le tracé. Nous avons fait intervenir pour ce tracé différents symétriques : pour le rayon 2 traversant L et se réfléchissant sur M_2 , nous avons introduit le symétrique J' de J par rapport à M_2 , puis lors de la réflexion sur L , le symétrique J_2 de J' par rapport à L qui n'est autre que le symétrique de J par rapport à M_2^* , miroir fictif symétrique de M_2 par rapport à L .

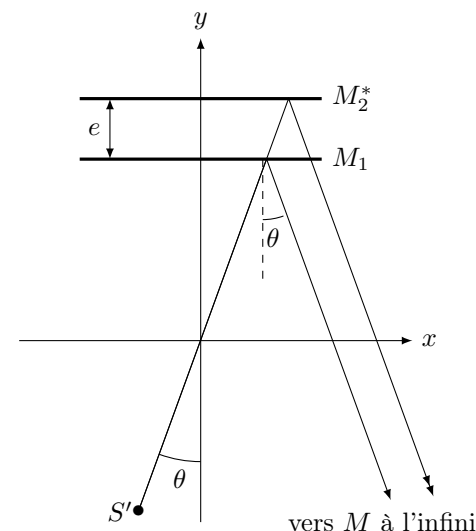


Pour le rayon 1 se réfléchissant sur L , il semble provenir du prolongement du

rayon symétrique du rayon incident par rapport à L , puis il se réfléchit sur M_1 en semblant provenir de J_1 , symétrique de J par rapport à L , et traverse ensuite L .

Nous constatons que ces deux rayons émergent du dispositif en étant parallèles l'un à l'autre et en faisant avec l'axe Jy l'angle θ .

Nous constatons de plus que tout l'ensemble peut être remplacé par un unique rayon provenant de S' (rayon symétrique du rayon incident par rapport à L) qui se réfléchit : pour le rayon 1, sur le miroir M_1 , pour le rayon 2, sur le miroir fictif M_2^* symétrique de M_2 par rapport à L . M_1 et M_2^* forment ainsi une lame d'air que nous allons représenter ci-dessous.

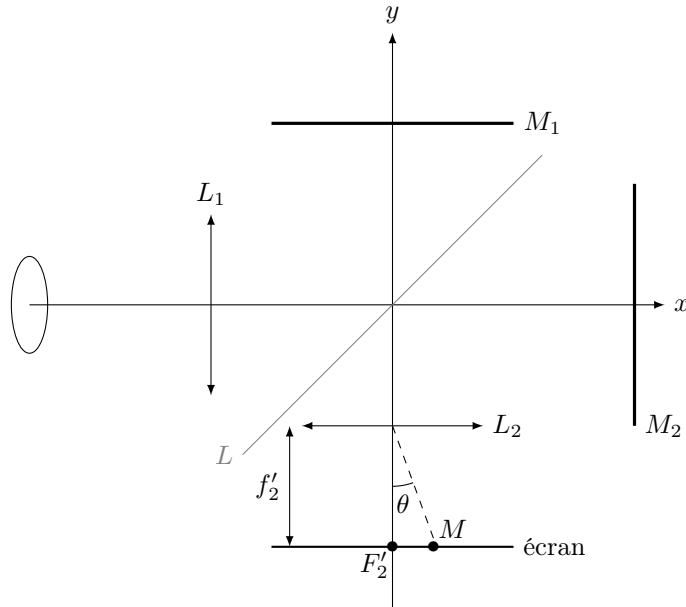


2. La différence de marche introduite entre ces deux rayons est $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (J_2M) - (J_1M)$ avec M point situé à l'infini dans la direction donnée par l'angle θ . Nous traçons donc sur le schéma initial un plan d'onde relatif à M passant par le point J_1 et intersectant le rayon 2 en H . D'après le principe

de retour inverse de la lumière : $\delta(M) = n_{\text{air}} J_2 H = 2n_{\text{air}} e \cos(\theta)$ avec $n_{\text{air}} = 1$ (on peut faire aussi le calcul directement dans la lame d'air équivalente).

3. La source étant une source étendue, le dispositif est un dispositif à division d'amplitude et la figure d'interférence est localisée à l'infini (brouillage à distance finie).

Pour l'utiliser dans de bonnes conditions : on fait converger les rayons issus de la source sur le Michelson grâce à une lentille L_1 de courte focale (20 cm par exemple), de façon à se placer en éclairage convergent. Ensuite, on ramène la figure d'interférence située à l'infini dans le plan focal image d'une lentille L_2 convergente de grande focale (1 m par exemple) située à la sortie du dispositif



4. Le point M où convergent les deux rayons issus du Michelson dans la direction d'angle θ est indiqué sur le schéma ci-dessus. L'ordre d'interférence en M est ainsi $p(M) = \frac{2n_{\text{air}} e \cos(\theta)}{\lambda_0}$. Une frange d'interférence correspond à un ordre d'interférence constant, donc par conséquent à $\cos(\theta) = \text{Cste}$, donc à $\theta = \text{Cste}'$. Le système présentant une invariance par rotation autour de l'axe

$F'_2 y$, les courbes $\theta = \text{Cste}'$ dans le plan de l'écran correspondent à des cercles centrés sur le foyer F'_2 de la lentille de projection. θ représentant l'inclinaison des rayons par rapport à l'axe $F'_2 y$, on parle ainsi d'anneaux d'égale inclinaison.

5. Pour régler l'appareil au contact optique, il faut translater M_2 de façon à diminuer l'épaisseur de la lame d'air, le contact optique correspondant en effet à $e = 0$.

Si e diminue, pour suivre la même frange, il faut conserver le même ordre d'interférence, ce qui correspond à une augmentation de $\cos(\theta)$ donc une diminution de θ . Lorsque les anneaux semblent rentrer vers le centre de la figure, on sait que e diminue. Conjointement, ces anneaux ont des rayons devenant de plus en plus grand. Lorsque le contact optique est obtenu, δ est nul en tout point de l'écran, on obtient sur ce dernier un éclairage uniforme (qui correspond en lumière polychromatique à la couleur de la source).

6. Les franges du coin d'air à partir d'une source raisonnablement étendue sont localisées au voisinage du coin d'air, c'est à dire au voisinage de M_1 .

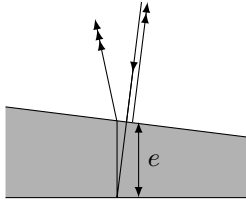
Pour les observer, on peut bien sûr regarder dans le Michelson sur le miroir M_1 , mais aussi les projeter sur un écran conjugué du coin d'air par une lentille d'assez courte focale. La source est quant à elle placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente de façon à éclairer le dispositif en incidence quasi-normale.

7. L'ordre d'interférence en un point M situé sur la surface de localisation à la distance x (qu'on algébriserait !) de l'arête du coin d'air qui passe par le milieu de M_1 est $p(M) = p(x) = \frac{2n_{\text{air}} \alpha x}{\lambda_0}$: la figure est ainsi constituée de droites rectilignes, équidistantes si $\alpha = \text{cste}$ parallèles à l'arête du coin d'air. La distance i entre deux franges de même intensité, appelée interfrange, est telle que $p(x+i) = p(x) + 1$, soit $i = \frac{\lambda_0}{2n_{\text{air}} \alpha}$.

Lorsque α augmente, l'interfrange diminue. Lorsque α diminue, l'interfrange augmente.

I.B-

8. On peut en incidence quasi-normale et en supposant que l'angle α est également très faible réaliser le schéma suivant (nous avons légèrement décalé pour une question de lisibilité le rayon incident (rayon 1) du rayon 2 réfléchi sur l'interface air/eau) :

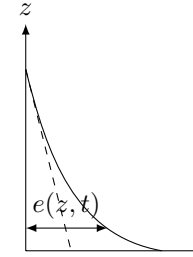


Nous constatons que si α est très faible, les rayons 2 et 3 s'interceptent au voisinage du coin d'eau, et que la différence de marche peut être assimilée comme pour le coin d'air à $\delta(e) = 2n_{\text{eau}}e$ avec e l'épaisseur locale du coin d'eau au niveau du point d'impact du rayon incident et $n_{\text{eau}} = 1,4$ (confusion possible de notation avec $n...$).

La différence de phase entre ces deux rayons est donc $\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} + \pi$ à cause du déphasage supplémentaire introduit par la réflexion à l'interface air/eau du rayon 2. Ceci se met donc bien finalement sous la forme $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2n_{\text{eau}}e + \frac{\lambda_0}{2} \right)$. L'ordre d'interférence est alors $p(e) = \frac{\Delta\phi}{2\pi}$.

9. Si nous avons un angle α constant, d'après ce que nous avons vu précédemment, l'interfrange devrait être constant et les franges équidistantes.

Nous observons sur la figure que les franges se resserrent vers le bas de la lame, ce qui correspond à une augmentation progressive de l'angle du coin d'eau. Nous pouvons donc décrire un profil approximatif de la forme du coin d'eau (très exagéré...) :

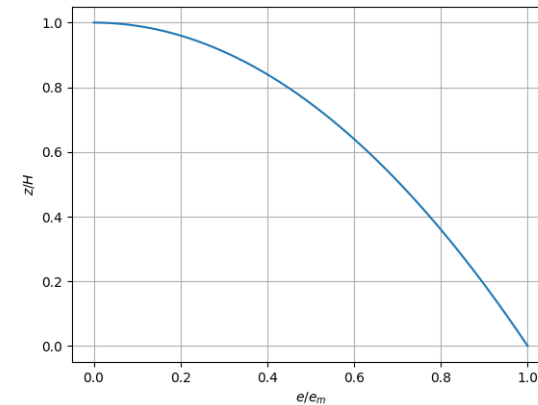


Le trait en pointillés correspond à un coin d'eau d'angle constant.

10. On peut signaler que pour $z = H$, $e = 0$ et $p(H) = \frac{1}{2}$: on obtient une frange sombre en $z = 0$, ce qui correspond bien à l'observation de la figure.

Notons que l'expression donnée n'est pas définie en $t = 0$. Par contre, on constate qu'à z fixé, l'épaisseur décroît avec le temps, ce qui correspond bien naturellement au drainage gravitaire et à l'amincissement progressif de la lame.

On peut représenter l'allure du profil de la lame compatible avec l'expression donnée, à un instant $t \neq 0$ fixé (on pose $e_m(t)$ l'épaisseur maximale de la lame).



Certes l'épaisseur de la lame est d'autant plus grande que z est faible, mais son évolution n'est pas du tout compatible avec la prédiction ci-dessus, basée sur le resserrement des franges. En effet, on voit que pour z voisin de h , e donnée par

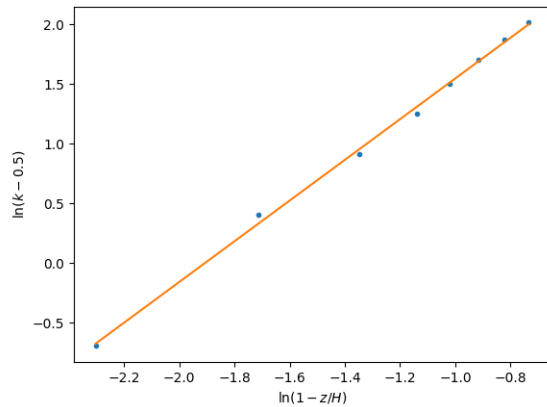
la formule évolution très rapidement avec z , ce qui devrait se traduire par un resserrement des franges contraire aux observations. De plus, $\frac{de}{dz}$ divergerait en $z = H...$ « Léger problème » donc !

11. Les franges brillantes correspondent à un ordre d'interférence entier : $p(e) = k$.

On peut donc en déduire : $2n_{\text{eau}}e(z)/\lambda_0 = k - 1/2$, soit :

$$(H - z)^\beta = \frac{\lambda_0}{2n_{\text{eau}}K}(k - 1/2) \text{ ou encore : } \ln(k - 1/2) = \beta \ln(1 - z/H) + A \text{ avec } A \text{ constante.}$$

On trace donc $\ln(k - 1/2)$ en fonction de $\ln(1 - z/H)$.



On obtient approximativement une droite, ce qui semblerait indiquer que la loi de puissance est vérifiée. Par contre, le calcul mène à une pente $\beta = 1,7$, ce qui ne correspond pas du tout au modèle proposé, et qui corrobore bien nos conclusions de la question 10 ! Peut-être faudrait-il prendre en compte les phénomènes de capillarité pour expliquer ce phénomène ?

II Caractéristiques des écoulements bidimensionnels

12. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ correspond à la dérivée locale temporelle du champ des vitesses. Elle traduit l'évolution temporelle de $\vec{v}$ en un point fixe de l'espace.
 $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ correspond à la dérivée convective du champ des vitesses. Elle traduit l'inhomogénéité spatiale de ce champ, à t fixé.

13. $\vec{f}_v$: résultante volumique des forces dites à distance (poids, forces électromagnétiques...). $-\overrightarrow{\text{grad}}P$: équivalent volumique des forces de pression. $\eta\Delta\vec{v}$: équivalent volumique des forces de viscosité.
14. L'écoulement est incompressible, homogène à rajouter pour que ρ soit considéré comme uniforme et constant. On prend le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes sous la seconde forme, et on peut sortir ρ du rotationnel et permuter l'ordre des dérivations spatiales et temporelles. Sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, il vient : $\rho\frac{\partial \text{rot}\vec{v}}{\partial t} + \rho\text{rot}(\text{rot}\vec{v} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$ si on néglige l'effet de la viscosité et les forces volumiques à distance. On aboutit ainsi à $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$. Sachant que $\text{div}\vec{v} = 0$ (écoulement incompressible) et que la divergence d'un rotationnel est nulle, le second terme devient : $\text{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$. De plus : $\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{\Omega}$.
On aboutit ainsi à l'expression demandée : $\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$.
15. L'épaisseur de la lame de savon est très faible devant les deux autres dimensions, ce qui pourrait justifier de considérer l'écoulement comme bidimensionnel dans les deux directions Ox et Oz : $\vec{v}(M, t) \approx v_x(x, z, t)\vec{u}_x + v_z(x, z, t)\vec{u}_z$. Dans ce cas, $\vec{\Omega} \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y$ et $(\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{0}$: le terme d'étirement de vortex est nul dans cette hypothèse.

III Couche limite oscillante et écoulement redressé

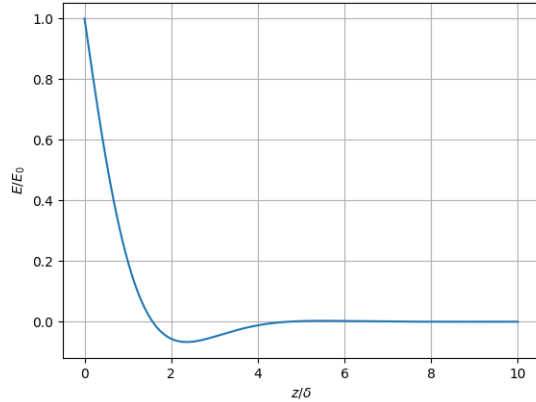
III.A- Diffusion de la vorticité dans une couche limite oscillante au voisinage d'une plaque plane et infinie, analogie électromagnétique

16. Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma_0\vec{E}$.  quations de Maxwell en ARQS magnétique, dans un milieu neutre localement : $\text{div}\vec{E} = 0$, $\text{div}\vec{B} = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\sigma_0\vec{E}$.
D'où $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\Delta\vec{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\sigma_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ car $\text{div}\vec{E} = 0$. On en déduit $\Delta\vec{E} = \mu_0\sigma_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:  quation de diffusion du champ.
17. On réinjecte la forme proposée pour le champ électrique dans cette équation et on obtient la relation de dispersion suivante $\underline{k}^2 = -i\mu_0\sigma_0\omega$. On en déduit

$\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ (on garde le signe + pour éviter la divergence du champ lorsque $z \rightarrow +\infty$).

18. On aboutit au champ réel suivant : $E(z, t) = E_0 \exp(-z/\delta) \cos(\omega t - z/\delta)$.

Le tracé suivant est réalisé à $t = 0$.



Nous constatons que, pour $z > 5\delta$, le champ électrique est pratiquement nul dans le métal. Ce champ et aussi le vecteur densité de courant volumique ne sont non nuls qu'au voisinage immédiat de la surface du métal, dans une peau d'épaisseur quelques δ (5δ) : c'est l'effet de peau (pénétration du champ extérieur sur une faible épaisseur de métal).

19. La puissance Joule volumique est $p_v = \sigma_0 E^2 = \sigma_0 E_0^2 \exp(-2z/\delta) \cos^2(\omega t - z/\delta)$. Sa valeur moyenne temporelle est $\langle p_v \rangle = \frac{\sigma_0 E_0^2 \exp(-2z/\delta)}{2}$, et la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une portion de métal de section S comprise entre $z = 0$ et $z = +\infty$ est : $\langle P_v \rangle = S \int_0^\infty p_v dz = \frac{E_0^2 S}{2} \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\mu_0 \omega}}$.

À ω fixée, lorsque $\sigma_0 \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$: le champ électrique et les courants volumiques sont nuls à l'intérieur d'un conducteur dit parfait de conductivité infini, ce qui évite la divergence de la puissance Joule : les courants, s'ils existent, seront surfaciques à la surface du métal dans le cadre de ce modèle. Quant

aux charges, qu'en dire, à part qu'il peut y avoir des charges uniquement surfaciques, puisque de toute façon, le conducteur est supposé être localement neutre ???

20. $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$.

21. $-\text{grad} P = -\frac{dP}{dz} \vec{e}_z$, $\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \vec{e}_x$. L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors : $\rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x = -\frac{dP}{dz} \vec{e}_z + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \vec{e}_x$. La projection de cette équation sur les deux axes conduit à : $\frac{dP}{dz} = 0$ donc $P = \text{cste}$ et $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \nu_c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$.

22. $\underline{f}(z)$ vérifie l'équation : $\underline{f}''(z) - i \frac{\omega}{\nu_c} \underline{f}(z) = 0$. En cherchant $\underline{f}(z) = \exp(rz)$, on aboutit à $r^2 = i \frac{\omega}{\nu_c}$, soit $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2\nu_c}{\omega}}$.

La forme générale de $\underline{f}$ est alors : $\underline{f} = A \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} z\right) + B \exp\left(\frac{1+i}{\delta} z\right)$.

23. Pour éviter la divergence du champ des vitesses pour $z \rightarrow \infty$, on ne garde que le premier terme dans l'expression précédente : $B = 0$, et $\underline{v}(z, t) = A \exp(-z/\delta) \exp(i(\omega t - z/\delta))$. Pour $z = 0$, $v(0, t) = V_0 \cos(\omega t)$, d'où $A = V_0$ et $\vec{v}(z, t) = V_0 \exp(-z/\delta) \cos(\omega t - z/\delta) \vec{e}_x$. Le champ des vitesses ne sera non nul que sur une couche d'épaisseur environ 5δ au voisinage de la plaque en mouvement ; δ représente ainsi l'épaisseur de la couche limite dans laquelle les effets de la viscosité sont dominants.

24. Ci dessous le tableau des analogies :

Électromagnétisme	Mécanique des fluides
Champ électrique $\vec{E}$	Champ des vitesses $\vec{v}$
Profondeur de peau δ	Épaisseur de la couche limite δ
évolution en $1/\sqrt{(\omega)}$	évolution en $1/\sqrt{(\omega)}$
Cas $\delta \rightarrow 0$	Cas $\delta \rightarrow 0$
conducteur parfait $\sigma_0 \rightarrow \infty$	écoulement parfait $\nu_c \rightarrow 0$

L'analogie entre $\vec{E}$ et $\vec{v}$ est immédiate, celle des deux épaisseurs également, et la dernière correspond au cas d'un écoulement parfait sans viscosité où la

plaque pourrait osciller sans mettre le fluide en mouvement (pas de diffusion de quantité de mouvement car pas de viscosité).

25. Que répondre à cette question ? $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$ a la structure d'une équation de diffusion, et $\eta \Delta \vec{v}$ est donc un terme diffusif, dont la présence au sein de l'équation de Navier-Stokes rend compte de la diffusion de quantité de mouvement perpendiculaire à l'écoulement liée à l'existence de forces de cisaillement.

26. $\vec{\Omega} = \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_y = \frac{V_0}{\delta} (-\cos(\omega t - z/\delta) + \sin(\omega t - z/\delta) \exp(-z/\delta) \vec{e}_y$ ou encore $\vec{\Omega} = -\frac{\sqrt{2}V_0}{\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \pi/4) \exp(-z/\delta) \vec{e}_y$.

Si $z \gg \delta$, en dehors de la couche limite, $\vec{\Omega} \approx \vec{0}$: il n'y a plus de vorticité. La vorticité ne sera donc importante qu'au sein de la couche limite, et quasi nulle en dehors (absence de cisaillement source de tourbillons).

III.B- Cas d'un cylindre oscillant à basse fréquence

27. Comme on a présence de tourbillons, on peut conclure de ce qui précède que les phénomènes ont lieu dans la couche limite. Or l'énoncé nous dit que ces tourbillons s'étendent sur des dimensions caractéristiques grandes devant d , qui sont elles même plus petites que δ . On peut donc écrire $\delta \gg d$.
28. On compare δ à d : $\delta^2 \gg d^2$ implique $\omega \ll \omega_{\text{lim}} = \frac{2\nu_c}{d^2}$.
29. Par définition du nombre de Reynolds : $R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$. Or en ordres de grandeur : $\|\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\| \approx \rho v^2/L$ et $\|\eta \Delta \vec{v}\| \approx \eta v/L^2$. On aboutit bien à $R_e = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}$. Lorsque $R_e \gg 1$, la convection l'emporte sur la diffusion, on peut négliger le terme diffusif devant le terme convectif dans l'équation de Navier-Stokes. Si $R_e \ll 1$, la diffusion l'emporte devant la convection. R_e permet ainsi de comparer l'importance de la convection (destabilisateur) et de la diffusion (stabilisateur) au sein d'un écoulement.
30. Se pose la question ici du choix de la distance caractéristique. Sachant qu'on se place au sein de la couche limite et qu'on considère les effets liés au mouvement du cylindre, on prendra d comme dimension caractéristique pour ce nombre de Reynolds au sein de la couche limite. $R_e = \frac{v d}{\nu_c} \ll 1$ si $v \ll \frac{\nu_c}{d}$.

31. Dans ce cadre, on peut négliger le terme convectif et l'équation de Navier-Stokes devient : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\vec{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$.

32. $v \approx a\omega$.

33. On va comparer $\|\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|$ à $\|\eta \Delta \vec{v}\|$ en ordre de grandeur : $\|\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\| \approx \rho v \omega$ et $\|\eta \Delta \vec{v}\| \approx \eta v/d^2$. $\|\eta \Delta \vec{v}\| \gg \|\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|$ implique $\omega \ll \nu_c/d^2$ ce qui est réalisé car $\omega \ll \omega_{\text{lim}}$. Ce terme de dérivée locale étant négligeable, l'équation de Navier-Stokes s'écrit sous la forme approchée : $\vec{\text{grad}} P \approx \eta \Delta \vec{v}$.

34. $\langle \vec{\text{grad}} P \rangle = \vec{\text{grad}} \langle P \rangle = \vec{0}$, donc $\langle \eta \Delta \vec{v} \rangle = \vec{0}$, ce qui est vérifiée si $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$. Que dire de plus ? Si c'est ce terme qui explique la présence de tourbillons stables, il ne peut pas être nul en valeur moyenne.

L'équation de départ étant linéaire, si P est sinusoïdal de pulsation ω , la réponse du milieu à cette excitation sera de même sinusoïdale et sa valeur moyenne nulle.

On ne peut donc pas expliquer les observations à partir de l'équation linéaire $\vec{\text{grad}} P \approx \eta \Delta \vec{v}$, d'où la présence nécessaire du terme convectif.

35. $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$ comprend 4 termes dont nous allons donner des ordres de grandeurs de la norme : $\rho\|(\vec{v}_p \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_p\| \approx \rho\|\vec{v}_p\|^2/d$, $\rho\|(\vec{v}_s \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_p\| \approx \rho\|\vec{v}_p\|\|\vec{v}_s\|/d$, $\rho\|(\vec{v}_p \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_s\| \approx \rho\|\vec{v}_p\|\|\vec{v}_s\|/d$, $\rho\|(\vec{v}_s \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_s\| \approx \rho\|\vec{v}_s\|^2/d$. Le terme principal est ainsi $\rho\|\vec{v}_p\|^2/d$.

$\eta \Delta \vec{v}$ comprend quant à lui deux termes dont voici les ordres de grandeurs : $\eta\|\Delta \vec{v}_p\| \approx \eta\|\vec{v}_p\|/d^2$ et $\eta\|\Delta \vec{v}_s\| \approx \eta\|\vec{v}_s\|/d^2$.

36.   l'ordre 0, $\vec{\text{grad}} P = \eta \Delta \vec{v}_p$. Donc l'équation perturbative restante s'écrit $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \eta \Delta \vec{v}_s$. En se limitant au premier ordre, et en prenant la valeur moyenne temporelle, sachant que $\langle \vec{v}_s \rangle = \vec{v}_s$, on aboutit en ordre de grandeur à $\rho \langle \|\vec{v}_p\|^2 \rangle / d \approx \eta \|\vec{v}_s\|/d^2$, soit $\|\vec{v}_s\| \approx \rho d \langle \|\vec{v}_p\|^2 \rangle / \eta$.

37. $\frac{\|\vec{v}_s\|^2}{\langle \|\vec{v}_p\|^2 \rangle} \approx \rho^2 d^2 \langle \|\vec{v}_p\|^2 \rangle / \eta^2 = R_e^2 \ll 1$. On peut donc dire que v_s est une petite perturbation de l'écoulement principal.

38. Si $\vec{v}_p$ est sinusoïdal de pulsation ω , alors $\langle \|\vec{v}_p\|^2 \rangle \neq 0$, donc $\vec{v}_s \neq \vec{0}$ (la valeur moyenne de $\cos^2(\omega t)$ vaut 1/2 et est constante). Il existe donc un

écoulement stationnaire perturbatif de valeur moyenne non nul responsable de l'apparition des tourbillons stationnaires observés.

On parle d'écoulement redressé par analogie avec le redressement effectué par une diode en électronique. Le signal d'entrée est de valeur moyenne nulle, le signal redressé a une valeur moyenne non nulle, liée au caractère non linéaire de la diode.

IV Étude d'une allée de Van Karman dans une lame de savon

39. On introduit le temps $\tau_1 = L/v_\infty$ qui correspond au temps mis par l'écoulement à parcourir par convection la distance L , et le temps $\tau_2 = 1/f$ qui correspond à la période du phénomène observé. Le nombre de Strouhal est alors $S_t = \frac{\tau_1}{\tau_2}$.

40. $R_e = \frac{v_\infty d_i}{\nu_c} = 40$ avec d_i le diamètre de la tige. C'est un peu limite, mais bon, on n'en n'est plus à cela près dans ce problème...

Dans cette gamme de nombre de Reynolds, $S_t = 0,2665 - \frac{1,018}{\sqrt{R_e}} = 0,1055$.

De façon expérimentale, la période des tourbillons est $\tau_2 = X/v_t \approx 1$ s, et $\tau_1 \approx d_i/v_\infty = 0,1$ s. On aboutit donc bien à $S_t = \tau_1/\tau_2 = 0,1$. Le modèle développé semble être cohérent avec les observations expérimentales.

41. À l'échelle de phénomènes météorologiques, on peut supposer que $R_e \gg 1$, et qu'on a atteint le plateau : $S_t \approx 0,2234$. En supposant qu'on puisse encore utiliser $v_t = V_\infty/2$, on aboutit à $\tau_2 = X/v_t \approx 4 \cdot 10^3$ s. En notant L la largeur de l'île, on en déduit $\tau_1 = L/v_\infty = \tau_2 S_t$, soit $L = 2 S_t X = 4,5$ km, ce qui, bien qu'un peu grand, est assez cohérent avec l'image de qualité médiocre fournie. On vérifie qu'avec cette valeur, $R_e \approx 2 \cdot 10^{10}$ permet d'utiliser la valeur au plateau de S_t .