

# Ondes non linéaires de déplétion et d'élévation

Ce sujet porte sur la propagation d'ondes dispersives et non linéaires à l'interface entre deux fluides. Il comporte quatre parties, rédigées de sorte à être très largement indépendantes. Si la partie I sert de bases aux suivantes, tous les résultats nécessaires pour aborder la suite du problème sont fournis aux candidat-e-s, qui pourront les admettre. Les parties suivantes sont elles strictement indépendantes, et les candidat-e-s pourront les aborder dans l'ordre de leur choix.

La partie I s'intéresse aux ondes à la surface libre d'un fluide, en régime linéaire. Les conditions de validité de l'approximation linéaire sont discutées. Les forces de gravité ainsi que les forces capillaires sont prises en compte, et le caractère dispersif de la propagation des ondes de surface est explicité.

La partie II introduit le concept de vitesse de groupe d'un paquet d'onde, dans un cadre général d'un milieu de propagation linéaire et dispersif. Dans un deuxième temps, on étudie la propagation de l'énergie dans le contexte des ondes de surface, et on démontre le lien entre vitesse de groupe et vitesse de propagation de l'énergie.

La partie III concerne une étude expérimentale de la vitesse de phase d'ondes à l'interface entre le mercure et l'air. Des précisions sur le dispositif expérimental et sur les méthodes de mesures sont données dans trois Annexes. On étudie le dispositif expérimental, les méthodes de mesures ainsi que les principes de fonctionnement des capteurs utilisés. Dans cette partie du problème on aborde plusieurs domaines différents de la physique, les questions font principalement appel à de l'analyse dimensionnelle et à la recherche d'ordre de grandeurs plutôt qu'à des résultats exacts.

La partie IV s'attache aux effets non linéaires sur la propagation d'ondes de surface. La propagation est décrite par l'équation de Korteweg-de Vries, qui est justifiée de manière heuristique. On développe ensuite une analogie mécanique qui permet de calculer la forme d'une *onde solitaire*, excitation non linéaire se propageant sans déformation dans le milieu dispersif. Les propriétés de cette solution sont alors confrontées aux observations expérimentales détaillées dans les Annexes.

Trois annexes complètent l'énoncé. Dans l'annexe A on donne les valeurs numériques de plusieurs paramètres physiques. Le choix a été fait, ainsi que dans le reste de l'énoncé, d'exprimer ces valeurs en unités du Système International, mais ces unités ne sont pas explicitées. L'annexe B regroupe des extraits d'un article dont la lecture est indispensable à la résolution des questions qui y font référence. Enfin, l'annexe C contient l'ensemble des figures illustrant les observations expérimentales discutées dans le texte (Figures 6 à 10).

# I Ondes à la surface libre d'un liquide

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation des ondes à la surface libre d'un liquide placé dans un champ de pesanteur uniforme d'accélération de la pesanteur  $g > 0$ . L'espace est rapporté à un référentiel galiléen ( $R$ ). Ce référentiel est associé à un repère orthonormé direct  $(0, x, y, z)$  d'origine  $O$ , et l'axe  $Oz$  est supposé vertical orienté vers le haut, soit  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Au repos, la surface du fluide est plane et définit le plan  $x0y$ .

On s'intéresse à des ondes planes se propageant selon l'axe  $Ox$ . À l'instant  $t$  et à la position  $x$ , la surface libre du fluide est à une altitude  $\eta(x, t)$ . La couche de fluide est limitée vers le bas par une surface plane imperméable d'altitude  $z = -h$ . La surface libre est en contact avec l'atmosphère dont la pression  $P_{atm}$  est constante dans le temps et uniforme. La Fig. 1 précise ces notations.

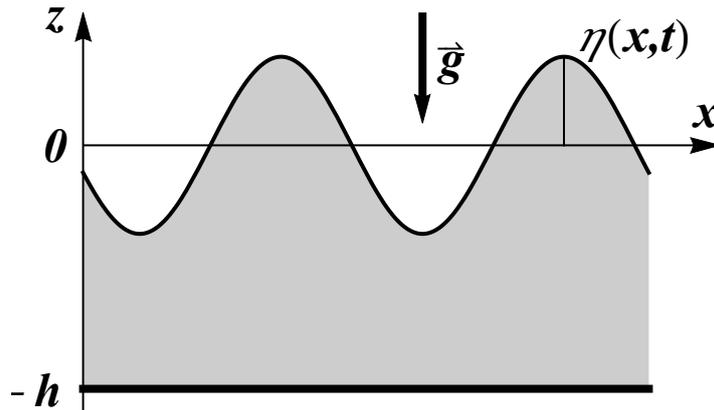


FIGURE 1 – Déformation de la surface libre du liquide.

On suppose le fluide newtonien et incompressible. Sa dynamique est donc décrite par les équations ci-dessous :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

où les paramètres  $\mu$  et  $\rho$  sont supposés constants.

## I.1 Relation de dispersion des ondes de surface.

- 1) Une onde se traduit par une quantité physique dépendant à la fois de l'espace et du temps. À l'exception des ondes à la surface d'un fluide, objet de cette première partie, proposer un exemple d'onde, de telle sorte que son milieu de propagation soit unidimensionnel. Proposer de même un exemple d'onde se propageant dans un milieu bidimensionnel, puis dans un milieu tridimensionnel. Préciser dans chaque cas la nature du milieu de propagation.
- 2) Dans un milieu où la propagation de l'onde est linéaire et dans lequel il existe une relation entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ , appelée *relation de dispersion*, définir la vitesse de phase notée  $c_\phi$ .
- 3) Identifier les variables physiques  $p$  et  $\vec{v}$ , et préciser leurs unités. Préciser la signification physique du champ de vecteur  $\vec{v}(x, y, z, t)$  dans les équations (1) et (2).
- 4) Identifier les paramètres  $\mu$  et  $\rho$  et préciser leurs unités.

- 5) Quelle est la définition d'un fluide Newtonien ? Quel(s) terme(s) de l'équation de Navier-Stokes traduit(sent) cette définition ?
- 6) Supposer que l'écoulement étudié est incompressible vous paraît-il une approximation raisonnable lors de l'étude des ondes de surface ? Justifier votre réponse à l'aide d'ordres de grandeurs tirés de l'Annexe A et des figures 6 et 9 de l'Annexe C.
- 7) Construire à partir des constantes  $\mu$  et  $\rho$  une quantité homogène à un coefficient de diffusion, notée  $\nu$ . À partir d'une longueur naturellement associée à l'onde de surface, exprimer un temps caractéristique de diffusion. À partir des données numériques disponibles et des figures fournies, estimer ce temps caractéristique de diffusion pour le mercure. Conclure.  
Désormais les phénomènes visqueux ne seront pas pris en compte. Simplifier en conséquence l'équation (2).
- 8) On note  $\eta_0$  l'amplitude typique des ondes de surface,  $\tau$  leur période typique et  $\lambda$  leur longueur d'onde typique. Sous quelle condition portant sur  $\eta_0$  et  $\lambda$  peut-on négliger le terme non-linéaire des équations de Navier-Stokes ?
- 9) Pour toute la suite du problème, on suppose le fluide *incompressible* et *non visqueux*. Pour toute la suite de cette partie, on se place dans le cadre de *l'approximation linéaire* (c'est-à-dire qu'on ne prend pas en compte le terme non-linéaire des équations de Navier-Stokes).  
Montrer que la vitesse du fluide peut être décrite comme le gradient d'un potentiel scalaire  $\Psi(x, z, t)$ ,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\nabla} \Psi.} \quad (3)$$

Obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel, et montrer que l'on peut écrire

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{P_{atm}}{\rho}.} \quad (4)$$

- 10) On cherche des ondes planes monochromatiques de nombre d'onde  $k$  et de pulsation  $\omega$ . On prend alors le potentiel des vitesses, défini à une fonction du temps quelconque près, sous la forme

$$\Psi(x, z, t) = F(z) \cos(kx - \omega t). \quad (5)$$

Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $F(z)$ . (On rappelle que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} g) = \Delta g$  où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien, et  $g$  une fonction scalaire quelconque de l'espace et du temps)

- 11) Quelle est la condition sur la vitesse du fluide au fond, pour  $z = -h$  ? En déduire une condition sur le potentiel des vitesses  $\Psi$ . Exprimer alors la fonction  $F(z)$ .
- 12) Exprimer la condition à la surface libre sur la vitesse du fluide. Simplifier cette relation dans le cadre de l'approximation linéaire et montrer qu'elle se traduit par

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0}.} \quad (6)$$

- 13) Pour une onde plane monochromatique, la surface libre est donnée par

$$\eta(x, t) = \eta_0 \sin(kx - \omega t), \quad (7)$$

où  $\eta_0$  est une constante homogène à une longueur. En déduire  $F(z)$  en fonction de  $k$ ,  $\omega$ ,  $h$ ,  $\eta_0$  et  $z$ .

- 14) Définir la tension de surface  $\gamma$  entre deux fluides en terme d'énergie, et en préciser une unité. La tension de surface admet aussi une interprétation en terme de force. Proposer un schéma appuyant cette interprétation, et préciser l'orientation de la force.
- 15) À la traversée d'une interface de rayon de courbure  $R$  entre deux fluides, la tension de surface induit une discontinuité de pression donnée par la loi de Laplace (voir Fig. 2)

$$P_{int} - P_{ext} = \frac{\gamma}{R}. \quad (8)$$

Dans le cas d'une interface d'équation  $\eta(x, t)$ , la courbure  $1/R$  est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (9)$$

Sous quelle condition peut-on linéariser cette expression de la courbure en fonction de  $\eta$  et ses dérivées ? Est-elle compatible avec la linéarisation de l'équation (2) ?

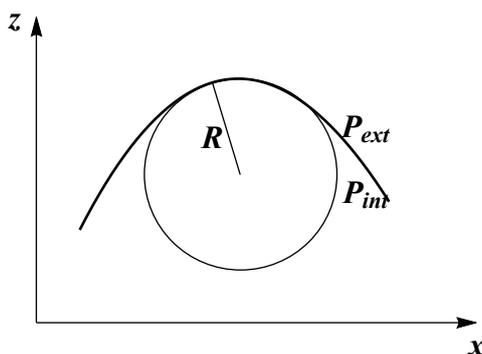


FIGURE 2 – Schéma d'une interface courbe  $z = \eta(x)$ , avec les mêmes notations que dans l'Eqn. (8). Dans un but de simplification, la courbure dans la direction normale à la feuille de papier est supposée nulle.

- 16) Au dessus de l'interface,  $z > \eta(x, t)$ , la pression est constante et uniforme, égale à  $P_{atm}$ . Utiliser les résultats précédents pour exprimer de deux façons différentes la pression dans le fluide juste sous l'interface, à la limite  $z \rightarrow \eta^-$ . Procéder à une linéarisation si nécessaire.
- 17) En déduire la relation de dispersion

$$\omega(k) = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \text{th}kh}. \quad (10)$$

## II Vitesse de groupe et propagation de l'énergie

### II.1 Notion de vitesse de groupe

On considère maintenant un milieu de propagation *dispersif* et *linéaire*. Une onde de nombre d'onde  $k$  a donc une pulsation  $\omega(k)$ . On définit un *paquet d'onde* comme une onde de durée et d'extension spatiale limitées. On considère un paquet d'onde qui se propage selon la direction  $Ox$  d'un référentiel galiléen  $R(0, x, y, z)$  d'origine  $O$ . On suppose connue sa forme à l'instant initial  $t = 0$ ,

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk, \quad (11)$$

où  $i^2 = -1$  et où

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t = 0) e^{-ikx} dx. \quad (12)$$

À un instant ultérieur  $t > 0$ , l'amplitude de l'onde peut donc s'écrire :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk. \quad (13)$$

On fait par ailleurs les deux hypothèses suivantes :

- [H1] - On suppose que la distribution spectrale  $\hat{u}(k)$  est piquée autour d'un nombre d'onde  $k_0$ . Plus précisément, son module est négligeable au delà d'un intervalle  $[k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$  avec  $\delta k \ll k_0$ .
- [H2] - On suppose que la relation de dispersion admet un développement de Taylor au voisinage de  $k_0$ ,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}[(k - k_0)^2] \quad (14)$$

On notera  $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$  et  $\omega'_0 \equiv (d\omega/dk)_{k=k_0}$ .

- 18) Proposer une expression de  $\hat{u}(k)$  compatible avec l'hypothèse [H1]. En représenter schématiquement le module  $|\hat{u}(k)|$ , et la partie réelle de l'amplitude initiale de l'onde  $u(x, t = 0)$  en fonction de  $x$ . Préciser l'expression de sa longueur d'onde typique  $\lambda_0$  en fonction de  $k_0$ . Indiquer sur le schéma de  $u(x, t = 0)$  l'extension spatiale  $\Delta L$  du paquet d'onde et la longueur d'onde  $\lambda_0$ . Quelle inégalité vérifie  $\Delta L$  vis à vis de  $\lambda_0$  ?
- 19) Donner un exemple de milieu de propagation où le développement (14) est impossible pour certaine(s) pulsation(s).
- 20) Montrer que sous les hypothèses [H1] et [H2], en première approximation, le paquet d'onde se propage sans déformation à une vitesse constante  $c_g$ , à part un facteur de phase global (c'est-à-dire indépendant de la position). On indiquera très soigneusement, chaque fois que nécessaire, laquelle des deux hypothèses [H1] ou [H2] intervient dans la démonstration. Exprimer la vitesse  $c_g$  en fonction de  $\omega'_0$  et vérifier qu'elle a bien la dimension physique d'une vitesse.
- 21) Quel phénomène physique pourrait-on mettre en évidence si on poussait le développement de Taylor (14) à l'ordre deux dans la démonstration précédente ? (le calcul n'est *pas* demandé !)

### II.2 Propagation de l'énergie

Dans cette partie, pour simplifier les calculs, on suppose la profondeur du fluide infinie,  $h \rightarrow +\infty$ . Pour une onde plane monochromatique de nombre d'onde  $k$  et pulsation  $\omega$  telle que  $\eta(x, t) = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$ , le potentiel des vitesses s'écrit alors

$$\Psi(x, z, t) = -(\omega/k)\eta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad (15)$$

et la relation de dispersion devient

$$\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho. \quad (16)$$

La valeur moyenne temporelle d'une fonction  $f(t)$  périodique de période  $T$  est notée  $\langle f \rangle$ , avec

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (17)$$

On s'intéresse aux quantités énergétiques associées à la propagation de l'onde de surface. L'attention des candidat-e-s est attirée sur le fait que, pour être cohérent avec l'approximation linéaire faite jusqu'à présent, les quantités énergétiques doivent être calculées à l'ordre deux du petit paramètre.

Par ailleurs, on calcule non pas une énergie potentielle absolue, mais la variation d'énergie potentielle entre le cas où le fluide est à l'équilibre, immobile et avec une interface horizontale, et le cas où l'onde de surface induit un mouvement du fluide et une déformation de l'interface.

22) Déduire de l'Eqn. (16) la vitesse de groupe, notée  $c_g$ , que l'on exprimera en fonction de  $g$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $k$  et  $\omega$ .

23) On considère une tranche de fluide de profondeur infinie, d'épaisseur  $dx$ , de largeur  $L$  dans la direction  $Oy$  lorsque le fluide est au repos. Calculer la densité linéique d'énergie cinétique  $e_K \equiv dE_K/dx$  où  $dE_K$  est l'énergie cinétique de la tranche d'épaisseur  $dx$ . Exprimer sa moyenne temporelle  $\langle e_K \rangle$  en fonction de  $\rho$ ,  $L$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $\eta_0$ .

24) Lorsque le fluide est au repos, la surface libre de la tranche de fluide est à l'altitude  $z = 0$ , et sous l'effet de l'onde elle passe à l'altitude  $z = \eta(x, t)$ . Calculer la densité linéique de la variation d'énergie potentielle de gravité  $e_P^G \equiv dE_P^G/dx$  (où  $dE_P^G$  est la variation d'énergie potentielle de gravité de la tranche de fluide) en fonction de  $\rho$ ,  $g$ ,  $L$  et  $\eta$ . En déduire sa valeur moyenne  $\langle e_P^G \rangle$  en fonction de  $\rho$ ,  $L$ ,  $g$  et  $\eta_0$ .

25) Sous l'effet de la déformation de la surface libre due à l'onde, l'épaisseur  $dx$  de la tranche est modifiée en surface. Calculer sa nouvelle longueur  $dl$  à l'ordre le plus bas en  $\partial\eta/\partial x$ , puis la variation de surface de l'interface entre le liquide et l'atmosphère. En déduire la densité linéique de la variation d'énergie potentielle de capillarité  $e_P^C \equiv dE_P^C/dx$  (où  $dE_P^C$  est la variation d'énergie potentielle de capillarité de la tranche de fluide), en fonction de  $\gamma$ ,  $L$  et  $\partial\eta/\partial x$ . En déduire sa valeur moyenne  $\langle e_P^C \rangle$  en fonction de  $\gamma$ ,  $L$ ,  $k$  et  $\eta_0$ .

26) Montrer que

$$\langle e_K \rangle = \langle e_P^G \rangle + \langle e_P^C \rangle. \quad (18)$$

Commenter. Exprimer la densité linéique totale d'énergie  $\langle \mathcal{E} \rangle = \langle e_K \rangle + \langle e_P^G \rangle + \langle e_P^C \rangle$  en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $L$  et  $\eta_0$ .

27) La variation de pression  $\delta p$  due à l'onde de surface est la correction au champ de pression hydrostatique. Montrer que

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (19)$$

En déduire la puissance  $\Pi_P$  des forces de pression dues à l'onde de surface traversant une surface plane d'abscisse  $x$  de la gauche vers la droite (c'est-à-dire dans le sens de propagation de l'onde), dont la hauteur est celle, infinie, de la couche de fluide et dont la largeur est  $L$  dans la direction  $Oy$ . Exprimer sa moyenne temporelle  $\langle \Pi_P \rangle$  en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $L$  et  $\eta_0$ .

28) De même, calculer la puissance  $\Pi_C$  des forces capillaires traversant un plan d'abscisse  $x$  de la gauche vers la droite, pour une largeur  $L$  dans la direction  $Oy$ . Préciser sur un schéma l'orientation de la force capillaire à prendre en compte. Exprimer sa moyenne temporelle  $\langle \Pi_C \rangle$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $L$  et  $\eta_0$ .

29) Exprimer la puissance totale  $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Pi_P \rangle + \langle \Pi_C \rangle$ . Montrer que  $\langle \mathcal{P} \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$  est homogène à une vitesse, et exprimer cette vitesse en fonction de  $g$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $k$  et  $\omega$ . Conclure.