# Exercices OD5

## EXERCICE 1

### Détermination de la densité d'un plasma

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, de fréquence $f$=25 MHz dans le vide, traverse un plasma comptant $N$ électrons (non relativistes) par mètre cube et des ions (beaucoup plus massifs que les électrons) assurant la neutralité électrique globale. Ce plasma occupe une tranche d'épaisseur $e$ suivant la direction de propagation. Le milieu en dehors du plasma est assimilable au vide sans charge ni courant. Par des moyens de mesure adaptés, on constate qu'après la traversée du plasma, l'onde conserve ses caractéristiques (y compris les amplitudes des champs).

1. Que peut-on dire sur $N$ à l'issue de cette expérience ? Par analogie avec l'optique, définir un indice de réfraction $n$ pour le plasma.
2. On intercale un plan métallique parfaitement conducteur, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, en aval du plasma. Déterminer le champ électromagnétique dans la zone en amont du plasma (par rapport à l'onde incidente). Comparer au cas où on supprimerait le plasma. En déduire un moyen de déterminer N sachant qu'on possède un dispositif permettant de mesurer localement la moyenne temporelle du carré scalaire du champ électrique.

## EXERCICE 2

### Sondage ionosphérique

Deux étudiants confrontent leurs points de vue sur les propriétés des ondes planes progressives monochromatiques se propageant dans l'ionosphère sans atténuation :

- ✘ L'un pense que la longueur d'onde $\lambda$ et la fréquence $f$ sont liées par :

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_p^2}}$$

- ✘ L'autre estime que :

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{f_p^2 - f^2}}$$

où $c$ est la vitesse de la lumière dans le vide et $f_p$ la fréquence plasma, de l'ordre de quelques MHz.

1. Sur des considérations physiques simples, trouver quel étudiant a raison, sachant qu'une des deux propositions est correcte.

2. Les deux étudiants ont oublié la formule de $f_p$ . Etablir cette formule, qu'on écrira sous la forme : $f_A\sqrt{N}$ , où $N$ désigne la concentration électronique volumique.

   On adopte pour l'ionosphère, ce modèle très simplifié :

   - ✘ Elle débute à une altitude $z_0$ , en dessous de laquelle le milieu est assimilable à du vide sans charge ni courants.
   - ✘ La concentration électronique augmente suivant la loi :

     $$N(z) = B(z - z_0) + C$$

     avec $B$ = constante jusqu'à une altitude $z_1$ puis $N(z)$ décroît pour $z > z_1$.

   On effectue un « sondage ionosphérique » en émettant verticalement des paquets d'onde de courte durée (environ 0,1ms) et de fréquence moyenne $f$. Quand un écho est perçu, on relève la durée $\tau$ entre le début de l'émission et la réception de l'écho. On obtient alors les résultats suivants :

   - ✘ Pour $f \leq 3.0\,\text{MHz}$ , un écho est perçu après une durée $\tau_0$ indépendant de $f$.
   - ✘ Pour $f = f_1 = 6.0\,\text{MHz}$ , un écho est perçu après une durée $\tau_1$.
   - ✘ Pour $f \geq 6.0\,\text{MHz}$ , aucun écho n'est perçu.

3. Montrer que la mesure de $\tau_0$ et $\tau_1$ permet d'accéder à $z_0$, $z_1$, $B$ et $C$. On se contentera de trouver un système d'équations sans chercher à le résoudre complètement.

4. On a mesuré $\tau_0$ =1,00 ms. La mesure de $\tau_1$ et une résolution numérique des équations précédentes ont conduit à $B = 9.57 \times 10^5\ \text{m}^{-4}$. En déduire dans quelle gamme de fréquences une communication radio sera possible avec :

   - ✘ Un avion volant à $z$ =15000 m d'altitude.
   - ✘ La station spatiale internationale (ISS) à $z$ = 400 km d'altitude.
   - ✘ Un satellite géostationnaire à z =36000 km d'altitude.

## EXERCICE 3

### Plasma et effet tunnel

Une tranche de plasma, de pulsation plasma $\omega_p$, occupe le volume de l'espace compris entre les plans $z = 0$ et $z = d$. De part et d'autre de ce plasma se trouve un milieu vide de charges et de courants. Une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique arrive en incidence normale sur la tranche de plasma. La pulsation $\omega$ de cette onde est inférieure à $\omega_p$.

1. Établir une expression pour le champ électromagnétique dans les trois zones de l'espace ($z < 0$ ; $0 < z < e$ et $z > e$).

2. En déduire le coefficient de transmission en énergie à travers la tranche de plasma :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(1+n_a^2)^2}{4n_a^2}\sinh^2\left(\frac{n_a\omega d}{c}\right)}$$

où $n_a$ est l'indice d'extinction du plasma.

3. Simplifier cette expression dans le cas limite où $\frac{n_a\omega d}{c} >> 1$. Commenter le résultat obtenu.

## EXERCICE 4

**Plasma et propagation guidée**

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique se propageant suivant $(Ox)$ dans un espace vide délimité par deux couches de plasma situées dans les zones $y \leq -\frac{a}{2}$ et $y \geq \frac{a}{2}$. On note $\omega_p$ la pulsation de plasma et on considère que l'onde électromagnétique dans le vide est de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\alpha y) \exp^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

Déterminer $k$ et $\alpha$ ainsi que les expressions des oem dans les deux zones de plasma.

## EXERCICE 5

**Conductivité de l'aluminium**

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique, de pulsation $\omega$ , atteint un conducteur métallique localement neutre et de conductivité $\underline{\gamma}$ a priori complexe.

1. En précisant vos hypothèses, montrer que :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega}$$

où $\gamma_0$ et $\tau$ sont des constantes que l'on définira.

2. Justifier que dans le domaine des ondes centimétriques, la conductivité de l'aluminuim est réelle.

3. Un téléphone portable est entouré d'une feuille d'aluminium alimentaire (épaisseur $20\,\mu$m). Justifier, par un argument quantitatif, que le signal reçu par le téléphone (fréquence 1 800 MHz) est fortement atténué. Déterminer la fraction de puissance incidente qui est absorbée par la feuille d'aluminium.

Données :

- ✘ Numéro atomique de l'aluminium : $Z = 13$

- Masse volumique de l'aluminium : $3 \times 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$
- Masse molaire de l'aluminium : $27\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$
- Conductivité statique de l'aluminium : $4 \times 10^7\,\mathrm{S{\cdot}m^{-1}}$

## EXERCICE 6

**Transparence de l'or**

On donne ci-dessous les indices de réfraction et d'extinction de l'or ainsi que son coefficient de réflexion en puissance en fonction de l'énergie photonique.

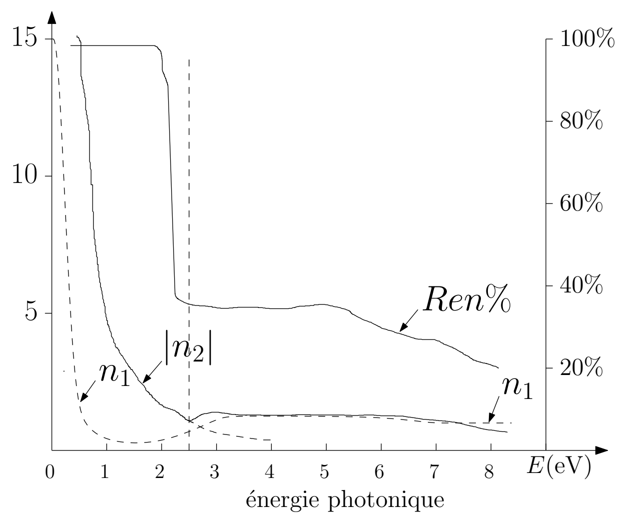


Figure 1 – Graphes de l'or

1. Interpréter ces courbes et donner un ordre de grandeur pour la pulsation plasma $\omega_p$ de l'or et de du temps caractéristique $\tau$ (temps moyen entre deux chocs).
2. Pourquoi un revêtement d'or de quelques 10nm est-il déposé sur les verres de lunettes des ouvriers travaillant autour des fours à très haute température ?

## EXERCICE 7

**Coefficient de réflexion de l'argent**

L'indice de réfraction de l'argent, éclairé par la raie $D$ du sodium, est $n_r = 0.18$ et son indice d'extinction est $|n_e| = 3.67$. Déterminer le coefficient de réflexion $R$ de l'argent pour cette longueur d'onde. Commenter.

Données : $\lambda_D = 579\,\mathrm{nm}$.

## EXERCICE 8

On souhaite déterminer si une onde électromagnétique de longueur d'onde kilométrique (dans le vide) peut se propager dans l'eau de mer. Cette dernière est supposée localement neutre, légèrement conductrice, de conductivité $\gamma = 4\,\mathrm{Sm^{-1}}$ , et de permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ .

1. Ecrire les équations de Maxwell dans l'eau de mer.
2. Justifier que le courant de déplacement peut être négligé dans ce milieu.
3. Une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propage dans l'air, assimilé au vide, et atteint la surface de l'eau sous incidence normale. En admettant la continuité du champ électrique et celle du champ magnétique à l'interface entre l'air et l'eau, déterminer la fraction de puissance incidente transmise à travers l'interface air/eau.
4. Quelle est la fraction de la puissance incidente qui atteint finalement une profondeur égale à 20 mètres sous l'eau ?

## EXERCICE 9

**Réflexion sur un diélectrique absorbant.**

Le demi-espace $z > 0$ est rempli par un diélectrique isotrope, homogène, non magnétique, de permittivité diélectrique complexe :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \underline{n}^2$$

avec :

$$\underline{n} = n + j\kappa = n_0 \exp j\phi$$

($n > 0$ et $\kappa > 0$).

On suppose que ce milieu ne contient pas de charges électriques libres et que sa conductivité est négligeable. Le vide occupe le demi-espace $z < 0$.
Une OPPH de champ électrique $\vec{\underline{E}}_i = E_{0i} \exp(j(kz - \omega t)) \vec{u}_x$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$, arrive sur le dioptre sous incidence nulle où elle subit une réflexion partielle. On admettra que les ondes réfléchies et transmises sont harmoniques de pulsation $\omega$, planes, qu'elles se propagent parallèlement avec l'axe $(Oz)$ et restent polarisées selon $\vec{u}_x$ .

1. Écrire les champs électriques $\underline{E}_r$ et $\underline{E}_t$ relatifs aux ondes réfléchie et transmise. En déduire les champs magnétiques associés à ces trois ondes.
2. Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = |\underline{r}| \exp(j\phi_r)$.
3. Déterminer le champ électrique total dans le demi-espace $z < 0$. Calculer $|\underline{E}_0(z)|$, le module de l'amplitude complexe de ce champ, en fonction de $z$. En déduire le rapport $S = \dfrac{|\underline{E}_0|_{max}}{|\underline{E}_0|_{min}}$ en fonction de $|\underline{r}|$. Que représente-il ?
4. Calculer la cote $z_m$ du 1er minimum de $|\underline{E}_0(z)|$ , quand on se déplace dans le sens des $z$ décroissants à partir de l'origine, en fonction de $k$ et $\phi_r$. On peut mesurer expérimentalement $S$ et $z_m$. Quel est l'intérêt de ces deux mesures ?

## EXERCICE 10

### Principe du chauffage par micro-ondes

On considère un milieu diélectrique, de susceptibilité statique $\chi_0$, non magnétique, de conductivité $\gamma$, qui présente une polarisation d'orientation $\vec{P}$ liée au champ électrique $\vec{E}$ par la relation phénoménologique de Debye :

$$\tau\frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \varepsilon_0\chi_0\vec{E}$$

1. Quelles sont la dimensions et la signification physique de $\tau$ ?
2. Montrer que ce milieu présente une susceptibilité complexe :

   $$\underline{\varepsilon_r} = \varepsilon' + j\varepsilon''$$

   On exprimera $\varepsilon'$ et $\varepsilon''$ en fonction de $\omega$, $\tau$ et $\chi_0$.
3. On étudie la propagation dans le diélectrique d'une OPPH dont le champ électrique s'écrit en notation complexe :

   $$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp\left(j(\underline{k}x - \omega t)\right)$$

   Avec $\underline{\vec{E}_0} \cdot \vec{u}_x = 0$ et $\underline{k} = k' + jk''$.
   Établir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = g(\omega)$ en fonction de $\omega$, $c$, $\gamma$, $\mu_0$, $\varepsilon'$ et $\varepsilon''$.
4. Á la fréquence $f = 2.45\,\text{GHz}$ (Bande S du domaine des micro-ondes), on a pour l'eau :

   $$|\underline{\varepsilon_r}| = 76\,;\ \tau = 10^{-12}\,\text{s et } \gamma = 1.0 \times 10^{-7}\,\text{S·m}^-1$$

   (a) Donner une valeur approchée de $\varepsilon'$.
   (b) Comparer $\varepsilon''$ et $\dfrac{\mu_0\gamma c^2}{\omega}$. En déduire les expressions approchées de $k'$ et de $k''$.
5. Donner l'expression de la densité volumique de courant de polarisation. En déduire la puissance moyenne dissipée par l'intermédiaire des processus de polarisation. Conclusion.

## EXERCICE 12

### Crépuscule

Une molécule constituant l'air, éclairée par une onde électromagnétique (champ électrique $\vec{E} = E_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e}_z$) provenant du Soleil acquiert un moment dipolaire électrique $\vec{p}(t) = p_0\cos\omega t\,\vec{e}_z$ , avec $p_0 = \dfrac{\frac{e^2E_0}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2}$, où $e$ et $m_e$ sont respectivement la charge élémentaire et la masse de l'électron.

1. Expliquer qualitativement la polarisation de cette molécule et donner la signification physique de $\omega_0$ . Sachant que $\omega_0 = 2.3 \times 10^{16}$ rad·s$^{-1}$, donner une expression approchée de $p_0$ lorsque l'onde excitatrice est dans le domaine du visible.
2. L'atmosphère comporte $n$ molécules par unité de volume. On admet que chaque molécule rayonne la puissance moyenne $P = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$. Justifier que la puissance moyenne diffusée par unité de volume est $p_d = nP$.
3. Montrer que l'intensité d'une composante monochromatique de longueur d'onde $\lambda$ de l'onde solaire décroît le long de l'axe de propagation lors de la traversée de l'atmosphère selon $I_\lambda(x) = I_\lambda(0)\, e^{-x/H_\lambda}$.
4. Proposer une évaluation de $H_{\lambda_1}$ pour le bleu et $H_{\lambda_2}$ pour le rouge.
5. Commenter la couleur du Soleil couchant.

## EXERCICE 13

On considère un cristal de NaCl ne possédant aucune propriété magnétique et traversé par une onde électromagnétique plane transverse de longueur d'onde très supérieure à la taille de la masse cristalline. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

On note $x(z,t)$ le déplacement relatif des ions $Na^+$ et $Cl^-$ du cristal. Tout se passe comme si chaque paire d'ions se comportait comme un objet de masse $m$ (masse réduite entre la masse de l'ion positif et celle de l'ion négatif ) et de charge $e$, soumis à la force due au champ électromagnétique de l'onde et à une force de rappel :

$$\vec{F} = -Kx\vec{e}_x$$

où :

$$K = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 \chi_i}$$

avec : $N$, le nombre de paires d'ions par unité de volume et $\chi_i$, la susceptibilité ionique du cristal.

1. En supposant que la vitesse de déplacement des ions est faible devant celle de la lumière, écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(z,t)$ en présence de l'onde. Expliciter la solution $\underline{X}$ en régime sinusoïdal établi de pulsation $\omega$.
2. En déduire l'expression de la densité complexe 3D de courant ion $\underline{\vec{J_i}}$ associée aux mouvements des ions en fonction de $N$, $e$, $m$,$\omega$, $\underline{\vec{E}}$ et $\omega_T$ et telle que :

$$\omega_T = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\chi_i}}$$

En plus de leur déplacement, le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ provoque dans chaque ion un déplacement du cortège électronique par rapport au noyau, ce qui se traduit pour chaque ion par l'apparition d'un moment dipolaire électrique proportionnel au champ. La polarisation électronique résultante vérifie :

$$\vec{P}_e = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

(pour les pulsations considérées dans cette étude)
Avec : $\chi_e$, la susceptibilité électronique du milieu
La densité de courant 3D résultant de cette polarisation est alors :

$$\vec{J}_e = \frac{\partial \vec{P}_e}{\partial t}$$

On définit enfin la permittivité relative, liée à ce phénomène de polarisation électronique :

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

3. Montrer que les équations de Maxwell imposent une relation de dispersion de la forme :

$$\underline{k}^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_l^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

On exprimera $\omega_L$ en fonction de $\omega_T$, $N$, $e$, $m$, $\varepsilon_0$ et $\varepsilon_r$

4. Expliciter le comportement de l'onde en fonction de la fréquence.
5. Dans le domaine optique on a $\omega^2 >> \omega_L^2$. Exprimer dans ce cas la vitesse de phase de l'onde en fonction de c et $\varepsilon_r$.

## EXERCICE 14

**Exercice ouvert : Dispersion de l'hydrogène**

Dans les conditions normales (0 °C et 760 mmHg), des mesures précises de l'indices de réfraction de l'hydrogène gazeux ont donné dans le visible et dans l'infrarouge la loi empirique :

$$n^2 = 1 + 2.721 \times 10^{-4} + \frac{2.11 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$

$\lambda$ étant la longueur d'onde en mètres.

En supposant que la dispersion observée est essentiellement due à la plus base des fréquences d'absorption située dans l'ultraviolet, montrer que ces mesures permettent de retrouver le rapport $\dfrac{e^2}{m_e}$, où $e$ est la charge élémentaire et où $m_e$ est la masse d'un électron.

**Autres exercices ouverts**

A l'aide du cours sur les DLHI, retrouver les lois suivantes :

- ✘ Loi de Beer-Lambert.
- ✘ Loi de Gladstone.